Jenniffer Kutzer

Quantifizierung der Trainingswirkungsanalyse im Skilanglauf mittels fuzzy-basierter Modellierung

eingereicht als
DIPLOMARBEIT
an der

HOCHSCHULE MITTWEIDA (FH)

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Mathematik/Physik/Informatik

Mittweida, 2009

Erstprüfer: Prof. Dr. Egbert Lindner
Zweitprüfer: Dr. Norman Bitterlich

Bibliographische Beschreibung:

Kutzer, Jenniffer:
Quantifizierung der Trainingswirkungsanalyse im Skilanglauf
mittels fuzzy-basierter Modellierung. – 2009. – 75 S.
Mittweida, Hochschule Mittweida (FH),
Fachbereich Mathematik/Physik/Informatik, Diplomarbeit, 2009

Referat:

Das Ziel dieser Arbeit liegt in der Quantifizierung des Zusammenhanges zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung bei Ausdauersportarten am Beispiel des Hochleistungssports Skilanglauf.

In einer retrospektiven Datenanalyse ist zu untersuchen, ob Veränderungen in der Wettkampfleistung mit Veränderungen in der Trainingsbelastung erklärt werden können, um die Trainingsgestaltung von Sportlern oder Sportlergruppen zu optimieren.

In das Verfahren sind trainingswissenschaftliche Erfahrungen und Empfehlungen zu berücksichtigen sowie die Struktur des Trainings in die Modellbildung aufzunehmen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Bitterlich für die Betreuung dieser Arbeit während der gesamten Anfertigung – vielen Dank für die überaus hilfreichen Diskussionen sowie inhaltlichen Denkanregungen und Korrekturen.

Herrn Prof. Lindner danke ich für die Bereitschaft als Gutachter seitens der Hochschule zu fungieren.

Einen besonderen Dank richte ich an Frau Dr. Ostrowski für die Bereitstellung des Diplomthemas und zahlreichen Auswertungsdaten für die Bearbeitung der Aufgabenstellung. Außerdem möchte ich mich für die vielen nützlichen sportwissenschaftlichen Anregungen und Hinweise Ihrerseits bedanken und für die Gelegenheit, die Modellergebnisse beim IAT Leipzig vorzustellen.

Ein Dank geht an meine Eltern und Großeltern, die mir dieses Studium erst ermöglicht haben.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meinem Lebensgefährten André Köder für die Unterstützung während der gesamten Diplomanfertigung bedanken – danke für Deine Ausdauer und Deine Motivation in den schwierigen Situationen.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

A	-	Ausdauer
allg	-	allgemein
E	-	Ergänzung
et al.	-	et alii (lat.) „und andere“
FIS	-	Federation Internationale de Ski
GTU	-	Gesamttrainingsumfang
IAT	-	Institut für Angewandte Trainingswissenschaften
K	-	Kraft
KKT	-	Karush-Kuhn-Tucker
PLU	-	Optimierungsproblem mit linearen Ungleichungsnebenbedingungen
RTP	-	Rahmentrainingsplan
SP	-	Sattelpunktproblem
spez	-	speziell
TK	-	Trainingskomponente

1 Einleitung

Das wichtigste Ziel im Leistungssport ist das Erreichen und Verbessern sportlicher Leistungen. Obwohl es zahlreiche Einflussgrößen auf die Leistungsentwicklung des Sportlers gibt, ist vor allem das Training von Bedeutung.

„Welches Training führt zu welcher Leistung?“ ist die Kernfrage der Trainingsmethodik schlechthin. Eine Vielzahl von Autoren hat sich bereits dieser Problematik zugewandt.

In der sportwissenschaftlichen Literatur findet man interessante Untersuchungen zu dieser Thematik, beispielsweise von Perl et al. und Mester et al. (2000). In ihren Arbeiten geht es um die modellgestützte und statistische Analyse der Wechselwirkung zwischen der Belastung und der Leistung auf der Grundlage leistungsdiagnostischer Daten wie Pulsfrequenz und/oder Lactatwerte des Blutes /1/.

In den Augen der Trainingswissenschaftler scheint dies allerdings nicht zu genügen. Die Forderung der Trainingspraxis, die Struktur des Trainings bei der Modellbildung zu berücksichtigen, ist bisher noch nicht ausreichend untersucht.

Obwohl bereits viele kausale Zusammenhänge zwischen der Leistung und der Trainingsbelastung aus statistischen Auswertungen einzelner Trainingskomponenten bekannt sind, die diese Ansätze „im Durchschnitt“ bestätigen, könnte die Anwendung multivariater Verfahren derartige Korrelationen aber sicherlich quantitativ verbessern. Eine solche Auswertung erfordert allerdings Datenerhebungen für eine große Anzahl von Sportlern sowie gut messbare Leistungsparameter. /2/

Die nachfolgende Arbeit stellt einen Lösungsansatz entgegen den klassischen statistischen Verfahren vor, mit dem trotz unvollständiger Informationen wirkungsvolle Trainingsempfehlungen in Abstimmung mit langjährigen Erfahrungen von Trainern und Wissenschaftlern begründet werden sollen. Beruhend auf einer fuzzy-basierten Modellierung wird der Zusammenhang zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung mit dem Ziel quantifiziert, die Auswirkungen von Veränderungen in der Trainingsgestaltung auf die Leistung zu diskutieren. Damit könnte ein wichtiger Schritt zur komplexen Optimierung des Trainings erreicht werden.

Das Verfahren zur Quantifizierung der Trainingswirkungsanalyse wird auf der Grundlage des Ausdauersports Skilanglaufs vorgestellt.

2 Problemanalyse

Angesichts der Komplexität der sportlichen Leistung und des Trainings wird das Auffinden kausaler Zusammenhänge erschwert. Einerseits wird die Wettkampfleistung des Sportlers durch eine Vielzahl von Faktoren wie Konkurrenz oder Wetter beeinflusst. Andererseits wird mit dem Begriff des Trainings eine Kombination aus Trainingsmitteln, -methoden und -belastungen beschrieben, die sich wiederum aus Intensitäten, Umfängen und Häufigkeiten zusammensetzen.
Im Skilanglauf werden Wettkampfleistungen unter wechselnden leistungsbeeinflussenden Wettkampfbedingungen erbracht. Dabei spielen reale Messgrößen zur Leistungsbewertung im Allgemeinen eine untergeordnete Rolle und ermöglichen somit keine quantifizierte Einordnung in die Leistungsentwicklung. Vielmehr basieren die Wettkampferfolge auf einem unmittelbaren Vergleich der Konkurrenten. Sie sind also von Faktoren beeinflusst, die keinen direkten messtechnisch ermittelbaren Vergleich zur eigenen Leistung aufweisen.
In ähnlicher Weise können die im Training realisierten Belastungen nicht direkt miteinander verglichen werden. Die weitgehende zeitliche Trennung der wesentlichen Trainings- und Wettkampfperiode steht einer mathematischen Modellierung zusätzlich entgegen.

Ein vielversprechender Lösungsansatz zur Quantifizierung der Trainingswirkungsanalyse liegt in der fuzzy-basierten Modellierung mit dem Ziel der Verarbeitung unpräziser und unvollständiger Informationen auf der Grundlage sportwissenschaftlicher Erfahrungen.

Die Grundlagen hierfür werden in Kapitel 3 benannt.

Die fuzzy-basierte Modellierung ermöglicht eine Quantifizierung der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung, indem der Erfüllungsgrad der Leistung „Das Wettkampfergebnis war gut“ und der Erfüllungsgrad der Trainingsbelastung „Das Training war wirksam“ mit Maßzahlen charakterisiert werden. Wird eine Korrelation beider Maßzahlen erzielt, so lässt sich der Zusammenhang zwischen der Leistung und der Trainingsbelastung quantifizieren.
Die Quantifizierung des Zusammenhanges führt im Allgemeinen auf ein überbestimmtes Gleichungssystem. Mit dem Verfahren von Karush-Kuhn-Tucker wird das daraus entstandene Optimierungsproblem gelöst. Im Ergebnis kann der Anteil einer jeden Trainingskomponente am Wettkampferfolg aufgezeigt werden.
Die zugrundeliegenden allgemeingültigen Entwicklungsstrategien zur Quantifizierung der Trainingswirkungsanalyse im Skilanglauf werden im Kapitel 4 vorgestellt.

Weiterführend werden die Auswirkungen bestimmter Festlegungen auf das Modell in Kapitel 5 aufgezeigt und diskutiert.

Die Zielstellung der Trainingswirkungsanalyse, die Auswirkungen von Veränderungen in der Trainingsgestaltung auf die Wettkampfleistung zu diskutieren, wird im Kapitel 6 als Anwendungsmöglichkeiten der Modellgleichung dargestellt.

3 Grundlagen

3.1 Fuzzy-Logik

Der Begriff Fuzzy-Sets geht auf den amerikanischen Professor Lofti Zadeh zurück. Er erwähnte diesen erstmals 1965 in einer seiner Arbeiten. Fuzzy lässt sich mit unscharf oder unpräzise übersetzen.
Die Theorie der Fuzzy-Logik beschreibt jedoch keine unpräzise Logik. Sie beschreibt eine Logik, die dazu dient, unscharfe Informationen zu verarbeiten. Dies ist oft dann der Fall, wenn keine mathematische Beschreibung eines Sachverhaltes oder Problems vorliegt, sondern lediglich eine verbale: „Astronomen sagen über den Planeten Jupiter, dass er *in gewisser Weise* Ähnlichkeiten mit einem Stern besitze", „Ein Dolch ist *im höchsten Maße* eine Waffe, eine Gardinenstange *eher* nicht" /3/, „Ein *wirksames* Training ist die beste Voraussetzung für eine *gute* Wettkampfleistung".
Wie aber lassen sich unscharfe Informationen mathematisch fassen? Die Lösung liegt in der Definition unscharfer Mengen.

3.2 Unscharfe Mengen

Grundlage der Fuzzy-Logik sind die so genannten unscharfen Mengen, in denen die Elemente, statt „enthalten" oder „nicht enthalten", auch „mehr oder wenig enthalten" sein können. Der Grad der Zugehörigkeit wird durch eine Zugehörigkeitsfunktion, die auch als charakteristische Funktion bezeichnet wird, beschrieben.
Eine Zugehörigkeitsfunktion wird als normiert bezeichnet, wenn sie den Elementen einer Grundmenge eine reelle Zahl zwischen 0 (keine Zugehörigkeit) und 1 (volle Zugehörigkeit) zuordnet.
Für die nachfolgenden Modellierungen werden ausschließlich normierte charakteristische Funktionen genutzt.

Die Theorie der Fuzzy-Logik stellt demnach eine Erweiterung der klassischen Logik oder Mengenlehre dar, indem neben den klassischen scharfen Wahrheitswerten 0 und 1 auch beliebige Zwischenzustände als unscharfe Werte zugelassen werden.

Definition 3-1:
Sei X eine Grundmenge. Dann heißt die Menge $U := \{\, \mu_U(x) \mid x \in X \,\}$ unscharfe Menge mit $\mu_U(x): X \rightarrow [0,1]$ als charakteristische Funktion. μ_U wird auch als Zugehörigkeitsfunktion bezeichnet, die jedem Element $x \in X$ den Zugehörigkeitsgrad $\mu_U(x)$ zuordnet.

Beispiel 3-1:

Betrachtet wird die Menge U der reellen Zahlen, die „viel größer" sind als 1.

$U := \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \gg 1 \}$

Der Vergleich „viel größer" ist mathematisch nicht eindeutig definiert, sondern muss problembezogen interpretiert werden.

Ein möglicher Zugehörigkeitsverlauf der unscharfen Menge U stellt sich nach Abbildung 3-1 wie folgt dar:

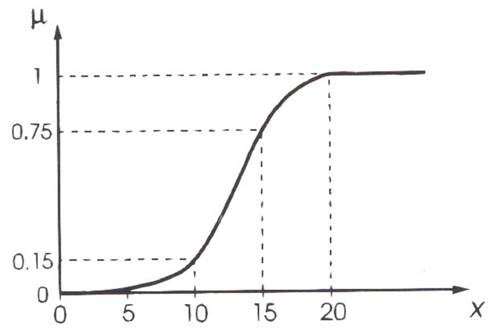

Abb. 3-1: *fuzzy-basierte Modellierung der Menge der Zahlen „viel größer als 1" /4/*

Für Werte, die kleiner oder gleich 1 sind, ist das Kriterium „viel größer als 1" nicht erfüllt, der Zugehörigkeitsgrad von $x \leq 1$ zur Menge U ist 0. Der Verlauf der Zugehörigkeitsfunktion verdeutlicht, dass sich für alle Werte mit $x > 20$ ein Erfüllungsgrad von 1 ergibt. Diese Werte gehören demnach mit Sicherheit zur Menge U. Alle Werte dazwischen gehören nun „mehr oder weniger" zur Menge und werden mit Zugehörigkeiten zwischen 0 und 1 bewertet.

Um die Vorteile einer fuzzy-basierten Modellierung zu verdeutlichen, wird die eben betrachtete Menge aus Beispiel 3-1 im Sinne der klassischen Mengenlehre beschrieben. Abbildung 3-2 zeigt eine denkbare Modellierung der Menge U.

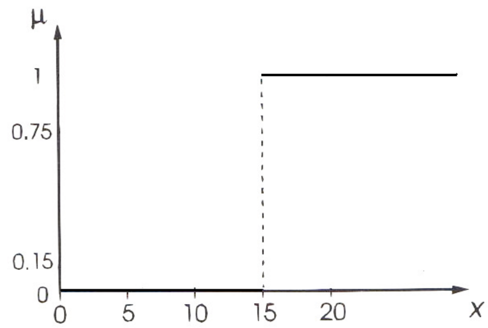

Abb. 3-2: *klassische Modellierung der Menge der Zahlen „viel größer als 1"*

Diese Festlegung würde bedeuten, dass $x = 15$ viel größer, $x = 14{,}9$ jedoch nicht viel größer als 1 ist. Dieser scharfe, unstetige Wechsel der Mengenzugehörigkeit an der Stelle $x = 15$ widerspricht der menschlichen Denkweise.
Die klassische Mengenlehre eignet sich, im Gegensatz zur Theorie der Fuzzy-Logik, offensichtlich nicht zur Modellierung derartiger qualitativer Aussagen.

Die Modellierung einer unscharfen Menge ist abhängig von der Wahl der Zugehörigkeitsfunktion und kann sich somit bei jedem Problemlösenden unterscheiden.

3.3 Zugehörigkeitsfunktionen

Unscharfe Mengen werden eindeutig durch Zugehörigkeitsfunktionen beschrieben. Die Art der Darstellung ist von der Grundmenge X abhängig.
Man unterscheidet zwischen der diskreten Darstellung durch Angabe diskreter Wertepaare (Singletons) und der parametrischen Darstellung in Form von analytischen Funktionen.
Hierbei haben sich einige gebräuchliche Funktionen herauskristallisiert, die im Folgenden kurz benannt werden sollen.

trapezförmige Zugehörigkeitsfunktion

Trapezförmige Zugehörigkeitsfunktionen sind über 4 Parameter u, s_1, s_2 und o sowie linear ansteigende bzw. abfallende Flanken festgelegt.

$$\mu(x, u, s_1, s_2, o) = \begin{cases} 0 & , falls\ x < u \\ \dfrac{x-u}{s_1-u} & , falls\ u \leq x < s_1 \\ 1 & , falls\ s_1 \leq x < s_2 \\ \dfrac{o-x}{o-s_2} & , falls\ s_2 \leq x < o \\ 0 & , falls\ x \geq o \end{cases}$$

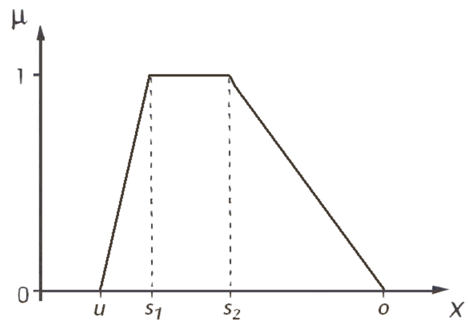

Abb. 3-3: *trapezförmige Zugehörigkeitsfunktion*

dreiecksförmige Zugehörigkeitsfunktion

Trapezförmige Zugehörigkeitsfunktionen gehen bei Festsetzung von $s_1 = s_2 = s$ in dreiecksförmige charakteristische Funktionen über.
Dreiecksförmige Zugehörigkeitsfunktionen werden durch 3 Freiheitsgrade u, s und o beschrieben und ebenfalls durch linear ansteigende bzw. abfallende Flanken charakterisiert.

Potenzialfunktion (nach BOCKLISCH) /5/

$$\mu(x, A, S, C, B, d) = \frac{A}{1 + \left(\frac{1}{B} - 1\right)\left(\frac{|x - S|}{C}\right)^d}$$

A … *Maximalwert der Zugehörigkeit*
A legt fest, welche Höhe der Zugehörigkeitswert maximal erreichen kann. Da der Grad der Zugehörigkeit im normierten Fall durch eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 beschrieben werden soll, wird A im Weiteren auf 1 gesetzt.

S … *Lageparameter*
Bei S liegt der Repräsentant der unscharfen Menge, da der Lageparameter den Argumentwert angibt, für den die maximale Zugehörigkeit berechnet wird.

C … *Ausdehnungsparameter*
C bestimmt die Ausdehnung des modellierten Klassengebietes und wird deshalb auch häufig als Klassengrenze bezeichnet. Alle Werte, für die $x = S \pm C$ gilt, erhalten die Zugehörigkeit, die durch den Parameter B beschrieben wird.

B … *Randzugehörigkeit*
B beschreibt die noch vorhandene Zugehörigkeit am Rand (bei $S \pm C$).

d … *Verlaufsparameter*
d steuert den stetig fallenden Verlauf der Zugehörigkeitsfunktion zum Rande zu. Je größer d, desto steiler verläuft die Funktion.

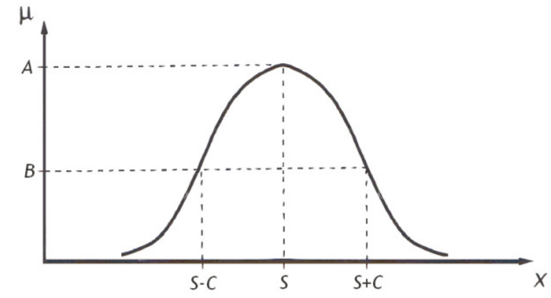

Abb. 3-4: *Potenzialfunktion*

Um den symmetrischen Verlauf der Potenzialfunktion zu umgehen und damit mehr Flexibilität zu erreichen, kann diese wie folgt abgeändert werden:

$$\mu(x, A, S, C_{\pm}, B_{\pm}, d_{\pm}) = \frac{A}{1 + \left(\frac{1}{B_{\pm}} - 1\right)\left(\frac{|x - S|}{C_{\pm}}\right)^{d_{\pm}}}$$

Für Argumente, die linksseitig/rechtsseitig von S liegen, werden die Parameter mit einem -/+ indiziert. Die Anzahl der Freiheitsgrade erhöht sich somit auf 8, bei normierten Potenzialfunktionen auf 7.

Im Gegensatz zur trapez- und dreiecksförmigen Zugehörigkeitsfunktion wird die Potenzialfunktion nicht durch Fallunterscheidungen beschrieben, sondern kann durch einen geschlossenen Formelausdruck angegeben werden. Der Zugehörigkeitswert 0 wird dabei an keiner Stelle angenommen.

Zwei entscheidende Kenngrößen unscharfer Mengen sind deren Einflussbreite und Toleranz.

Definition 3-2:
Sei X eine Grundmenge. Dann bezeichnet $Supp(\mu_U) = \{\, x \mid x \in X, \mu_U(x) > 0 \,\}$ den Träger (engl. Support) einer unscharfen Menge.

Der Träger beschreibt die Menge aller Elemente x, deren Zugehörigkeitswert $\mu_U(x)$ größer null ist.

Definition 3-3:

Sei X eine Grundmenge. Mit Toleranz bezeichnet man die Elemente der unscharfen Menge, deren Zugehörigkeitsgrade $\mu_U(x)$ den Wert 1 annehmen.

Die Toleranz einer trapezförmigen Fuzzy-Menge umfasst das Intervall $[s_1, s_2]$. Bei einer dreiecks- bzw. potenzialförmigen unscharfen Menge besteht die Toleranz demnach immer aus der einelementigen Menge s bzw. S.

3.4 Auswertungsdaten

Die vorliegende Arbeit wurde auf der Grundlage von Trainings- und Wettkampfdaten von 9 Skilangläufern (alle Mitglieder der deutschen Skinationalmannschaft 2008 und 2009) angefertigt. Diese Daten wurden vom Institut für Angewandte Trainingswissenschaften (IAT) in Leipzig zur Verfügung gestellt.

Das Skilanglauftraining gestaltet sich nach dem Prinzip der Periodisierung. Darunter versteht man eine Einteilung des Trainings in verschiedene Perioden: Vorbereitungs- Wettkampf- und Übergangsperioden.

Tab. 3-1: *Trainingsperiodisierung im Skilanglauf /6/*

Periode	Vorbereitungsperiode			Wettkampfperiode	Übergangsperiode
Etappe	I	II	III	IV	V
Zeitraum	Mai-Juli	Aug. – Sept.	Okt. – Nov.	Dez. - März	April

3.4.1 Wettkampfdaten

Die Wettkampfperiode im Skilanglauf umfasst im Allgemeinen eine Zeitspanne von Dezember bis März. Die Wettkampfdaten beinhalten eine Auflistung aller Wettkämpfe des Sportlers. Diese sind untergliedert in

- Datum und Ort des Wettkampfes
- Wettkampfart
- Platzierung des Sportlers
- FIS-Punkte
- Distanz- und Sprint-FIS-Punkte

Leistungen im Ausdauersport werden vorrangig auf der Grundlage von Wettkampfergebnissen beurteilt. Im Skilanglauf werden die Ergebnisse durch die Vergabe von FIS-Punkten quantifiziert. Mit

Hilfe dieser Kennzahlen können Einflussfaktoren im Wettkampf wie Konkurrenz und Wetter zumindest soweit eliminiert werden, dass Leistungsvergleiche von Sportlern objektiviert werden.

FIS steht für Federation Internationale de Ski (frz.) und bildet die 1924 gegründete Vereinigung aller nationalen Skiverbände zur Regelung des internationalen Sportverkehrs /7/.
Um eine Vergleichbarkeit von Wettkampfresultaten überhaupt zu ermöglichen, werden die Wettkampfergebnisse (Platzierung, Laufzeit über eine bestimmte Distanz) unter Berücksichtigung von

- Wettkampfart (u.a. Sprintwettkämpfe, Wettkämpfe mit Verfolgungsstart oder Massenstart),
- Wettkampfcharakter (u.a. Olympische Spiele, Weltmeisterschaften, FIS Rennen, nationale) und
- Wertigkeit des Wettkampfes (abhängig von der Qualität der teilnehmenden Wettkämpfer)

in FIS-Punkte umgerechnet. Ein gutes Wettkampfergebnis wird dabei durch die Vergabe weniger FIS-Punkte charakterisiert.
Die fünf besten Ergebnisse jedes Sportlers werden am Ende der Saison zu einem mittleren FIS-Punktwert für die Disziplinen Distanz und Sprint zusammengefasst. Diese Werte werden von der FIS adäquat zu einer „Weltrangliste“ geführt (Saisonpunkte). /8/

3.4.2 Trainingsdaten

Eine Trainingsperiode im Skilanglauf umfasst eine Zeitspanne von einem Jahr. Gemäß Tabelle 3-1 beginnt die Trainingsperiode im Mai des Jahres und endet im April des Folgejahres. Da der Sportler während der Wettkampfperiode ebenfalls trainiert, wird diese zur Trainingsperiode dazugezählt.

Das Skilanglauftraining wird während des gesamten Jahres beinahe täglich erfasst. Die Aufzeichnungen der Trainingsdaten tabellieren

- das Datum und den Ort des Trainings
- die absolvierten Trainingseinheiten mit Zeitangaben, gegebenenfalls Kilometer- und Geschwindigkeitsangaben

Die Trainingszusammensetzung gliedert sich nach folgender Baumstruktur:

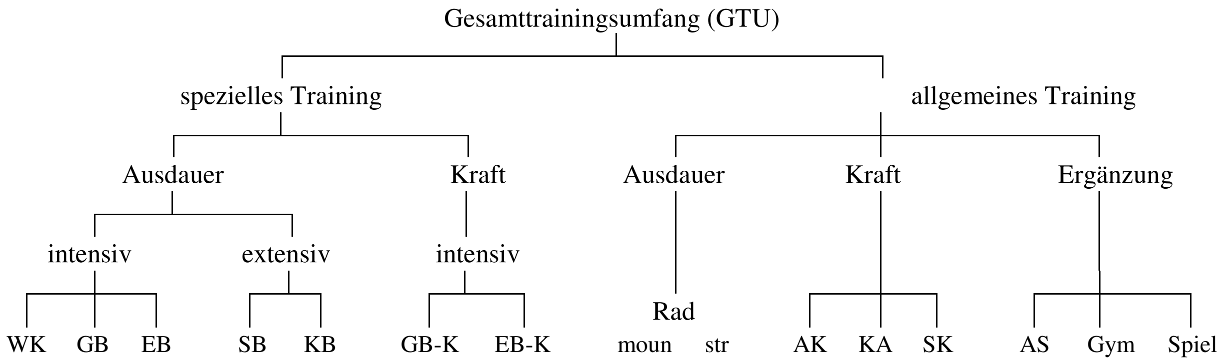

Abb. 3-5: *Trainingsstruktur Skilanglauf /6/*

Legende

WK	...	Wettkampf	Rad/str	...	Rad/Straße
GB	...	Grenzbereich	Rad/moun	...	Rad/Mountainbike
EB	...	Entwicklungsbereich	AK	...	allgemeine Kraft
SB	...	Stabilisationsbereich	KA	...	Kraftausdauer
KB	...	Kompensationsbereich	SK	...	Schnellkraft
GB-K	...	Grenzbereich-Kraft	AS	...	andere Sportarten
EB-K	...	Entwicklungsbereich-Kraft	Gymn.	...	Gymnastik

Als Kenngröße für die Belastung eines Sportlers wurde der Aufwand des Trainings in Stunden gewählt. Die im Nachfolgenden beschriebene Trainingsbewertung ist von den konkreten Inhalten der Trainingseinheiten jedoch unabhängig.
Die dargestellte Trainingsstruktur besitzt die Eigenschaft einer Monohierachie. Jede Trainingskomponente lässt sich in weitere Komponenten derart unterteilen, dass jedem Trainingselement höchstens ein anderes unmittelbar übergeordnet wird. Der in Stunden erfasste Trainingsaufwand einer Komponente entspricht demnach der Summe der Trainingsumfänge der darunterliegenden Komponenten.

Die Trainingsanforderungen des Sportlers richten sich dabei nach trainingspraktischen Erfahrungen und sportwissenschaftlichen Erkenntnissen und werden in Trainingsplänen verankert.
Das Skilanglauftraining gestaltet sich im Allgemeinen nach den Richtwerten eines Rahmentrainingsplans, der individuell an die Sportler angepasst werden kann.
„Als Rahmentrainingsplan werden die auf der Trainingskonzeption eines Fachverbandes basierenden verallgemeinerten Richtlinien zur Gestaltung des Trainingsprozesses für definierte Sportlergruppen bezeichnet. [...] Sie beinhalten die wesentlichen Aufgaben eines Trainingsjahres [...].“ /9/

4 Fuzzy-basierte Modellierung der Trainingswirkungsanalyse

Die Quantifizierung der Trainingswirkungsanalyse hat zum Ziel, am Ende einer Wettkampfsaison zu analysieren, ob rückblickend über die letzten Jahre eine Korrelation der erreichten Wettkampfleistung und der realisieren Trainingsbelastung angegeben werden kann.
Ein Lösungsansatz zur Quantifizierung des Zusammenhanges zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung liegt in der fuzzy-basierten Modellierung. Die Transformation von Wettkampf- und Trainingsdaten in dimensionslose Bewertungskenngrößen ermöglicht den Zusammenhang zu quantifizieren.

4.1 Leistungsmodellierung

Die Beschreibung der Wettkampfleistung erfolgt anhand des Durchschnittswertes der fünf besten Rennen pro Saison für die Disziplin Distanz.
Die Distanz-FIS-Punkte werden mit Hilfe von Zugehörigkeitsfunktionen quantifiziert. Dadurch gelingt es, die qualitative Aussage „Das Wettkampfergebnis war gut" zu beschreiben. Der Erfüllungsgrad der Aussage wird durch eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 charakterisiert. Je weniger FIS-Punkte der Sportler am Ende einer Wettkampfperiode aufweist, desto besser wird das Kriterium erfüllt.
Das nachfolgende Beispiel zeigt einen Vorschlag für den Verlauf der Dreiecksfunktion für die Bewertung der Distanz-FIS-Punktwerte eines 20-jährigen Sportlers.

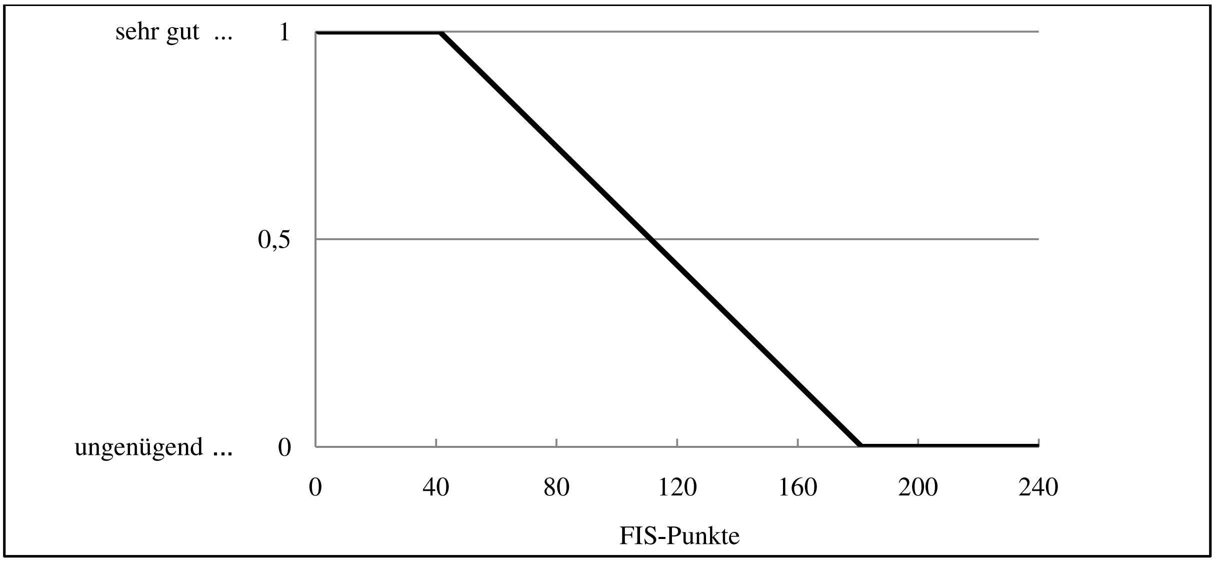

Abb. 4-1: *Dreiecksfunktion zur Bewertung der Eigenschaft „gute Wettkampfleistung"*

Beim Erreichen von 40 oder weniger Distanz-FIS-Punkten (im Nachfolgenden nur noch als FIS-Punkte bezeichnet) wird die Saisonleistung als „sehr gut" beschrieben und mit dem Zugehörigkeitsgrad 1 bewertet. Je mehr FIS-Punkte der Sportler über 40 erhält, umso weniger wird das Ergebnis als „gut" beschrieben. Der FIS-Punktwert, der mit dem Zugehörigkeitswert 0,5 bemessen

wird, könnte im Sinne der klassischen Mengenlehre als Übergang zwischen einem „guten" und „ungenügenden" Training angesehen werden. Im dargestellten Zugehörigkeitsverlauf wird dieser Übergang durch 110 FIS-Punkte charakterisiert. Werden 180 oder mehr FIS-Punkte im Wettkampf erteilt, wird die Leistung als „ungenügend" bezeichnet und mit 0 bewertet.
Die Festlegung geeigneter Bewertungsgrenzen könnte, anders als hier vorgeschlagen, aus der Sicht des Anwenders rein subjektiv oder auf der Grundlage von sportwissenschaftlichen Erfahrungswerten erfolgen.

Der einseitige Verlauf der geschulterten Dreiecksfunktion für die Leistungsbewertung ist durch die Wahl von 2 Freiheitsgraden s und o bereits eindeutig bestimmt:

- Festlegung von s:
  Bis zu welchem FIS-Punktwert wird die Leistung als „sehr gut" $\mu(x) = 1$ beschrieben.

- Festlegung von o:
  Ab welchem FIS-Punktwert gilt die Leistung als „ungenügend" $\mu(x) = 0$.

$$\mu(x,s,o) = \begin{cases} 1 & , falls\ x < s \\ \dfrac{o-x}{o-s} & , falls\ s \leq x < o \\ 0 & , falls\ x > o \end{cases}$$

Die Leistungsbewertung wurde neben der geschulterten Dreiecksfunktion, die im Nachfolgenden nur noch als Dreiecksfunktion benannt wird, auch anhand der Potenzialfunktion realisiert.

Setzt man in der Potenzialfunktion den Lageparameter S auf 0, so erhält man für $x > 0$ auch hier den einseitigen Verlauf der Funktion.

$$\mu(x,S,C,B,d) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{B} - 1\right)\left(\frac{|x|}{C}\right)^d}$$

Diese Festsetzung hat zur Konsequenz, dass die Leistung lediglich bei einem FIS-Punktwert von 0 als „sehr gut" bezeichnet und mit voller Zufriedenheit $\mu(0) = 1$ bewertet werden würde.
Durch die Festlegung der 3 Freiheitsgrade B, C und d ist der einseitige Verlauf der Potenzialfunktion eindeutig beschrieben.

- Bis zu welchem FIS-Punktwert wird die Leistung „gut“ noch akzeptiert $\mu(x) = 0{,}5$
- Ab welchem FIS-Punktwert ist die Leistung „nicht befriedigend“ $\mu(x) = 0{,}1$

Einen zur Dreiecksfunktion vergleichbaren Zugehörigkeitsverlauf der Potenzialfunktion für die FIS-Punktbewertung eines 20-jährigen Sportlers zeigt die nachfolgende Abbildung.

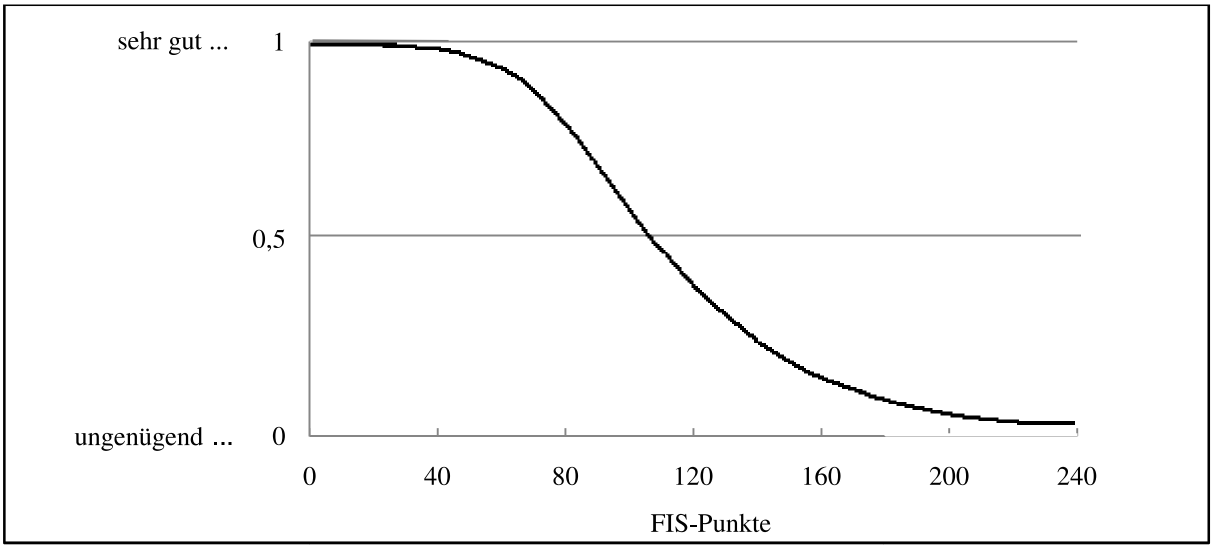

Abb. 4-2: *Potenzialfunktion zur Bewertung der Eigenschaft „gute Wettkampfleistung“*

Für den dargestellten Zugehörigkeitsverlauf wurden B = 0,5 und C = 110 sowie d = 5 gesetzt.
Ein Vergleich der Dreiecks- und Potenzialfunktion zur FIS-Punkt-Bewertung eines 20-jährigen Sportlers zeigt einen annähernd gleichen Verlauf beider Zugehörigkeitsfunktionen.
Das Erreichen von 110 FIS-Punkten wird bei beiden Funktionen mit dem Zugehörigkeitswert 0,5 bewertet. Lediglich an den Grenzen s und o der Dreiecksfunktion lässt sich mit Hilfe der Potenzialfunktion ein weicherer Übergang erzielen, sodass die Bewertung von 40 FIS-Punkten nicht durch den Wert 1, sondern durch den Wert 0,994 charakterisiert wird. Entsprechend werden 180 FIS-Punkte nicht durch den Zugehörigkeitsgrad 0, sondern 0,08 quantifiziert.

Aus Vereinfachungsgründen wird im Weiteren zur Bewertung der Wettkampfleistung und in nachfolgenden Ausführungen zur Bewertung des Skilanglauftrainings die Dreiecksfunktion gewählt. Aufgrund deren linearer Flanken lassen sich die Bewertungskenngrößen problemlos in Absolutwerte zurücktransformieren.
Die Wahl der Dreiecksfunktion bietet zudem den Vorteil, dass ein ganzer Bereich von FIS-Punkten, bei denen die Leistung als „sehr gut“ beschrieben werden soll, angegeben werden kann. Dadurch lassen sich sprachliche Aussagen wie „*Bis zu* 40 FIS-Punkten bezeichnen die Leistung als sehr gut“ modellieren. Bei der Bewertung mit Hilfe der Potenzialfunktion gibt es hingegen nur einen FIS-Punktwert, der die Eigenschaft $\mu(x) = 1$ erfüllt.

Eine altersgerechte Entwicklung des Sportlers setzt voraus, dass sich die Leistung des Athleten in jedem Trainingsjahr verbessert.

Um diese altersabhängige Entwicklung in die Modellierung einzubeziehen, wurden die Grenzen der Zugehörigkeitsfunktion mit unterschiedlichem Alter verschieden gewählt. Auf der Grundlage statistischer Datenerhebungen vom IAT Leipzig wurden für einige Altersbereiche männlicher Skilanglaufsportler bereits Grenzen angegeben, die nachfolgend tabelliert wurden. Unter der Annahme, dass die Trainingsbelastung für jedes Jahr im Altersbereich 15 bis 25 linear zunimmt, werden die Grenzen mittels linearer Interpolation für diesen Bereich ermittelt und hier auszugsweise angegeben.

Tab. 4-1: *Erfahrungswerte zur Bewertung der Distanz-FIS-Punkte männlicher Sportler /6/*

Bewertung FIS-Punkte		
Alter	**sehr gut**	**ungenügend**
18	bis 50	ab 230
26	bis 15	ab 35

Aus den daraus ermittelten Interpolationsgeraden ergeben sich die altersabhängigen Grenzen (Werte gerundet) der Dreiecksfunktionen.

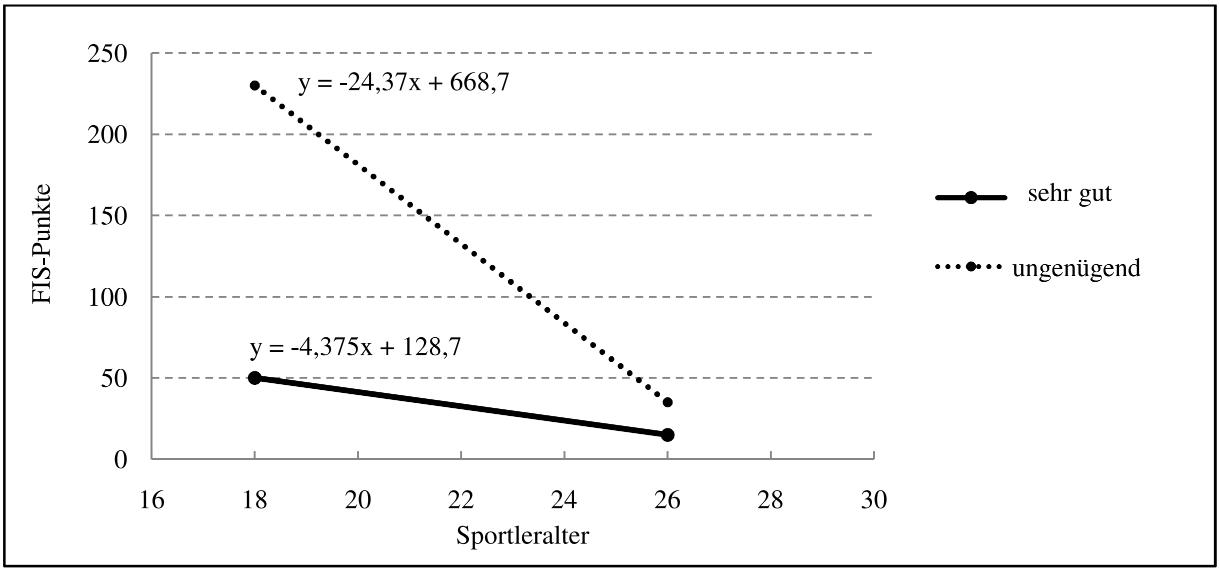

Abb. 4-3: *durch Interpolation ermittelte Bewertungsgrenzen*

Tab. 4-2: *geschätzte Grenzen für die Bewertung der Distanz-FIS-Punkte mittels Dreiecksfunktionen*

Bewertung Distanz-FIS-Punkte		
Alter	**sehr gut** y = -4,375x + 128,7	**ungenügend** y = -24,37x + 668,7
19	46	206
20	41	181
21	37	157
22	32	133
23	28	108
24	24	84
25	19	59

Abbildung 4-4 stellt für die Jahre 20 bis 23 die Dreiecksfunktionen für eine altersmäßige Bewertung der Distanz-FIS-Punkte dar.

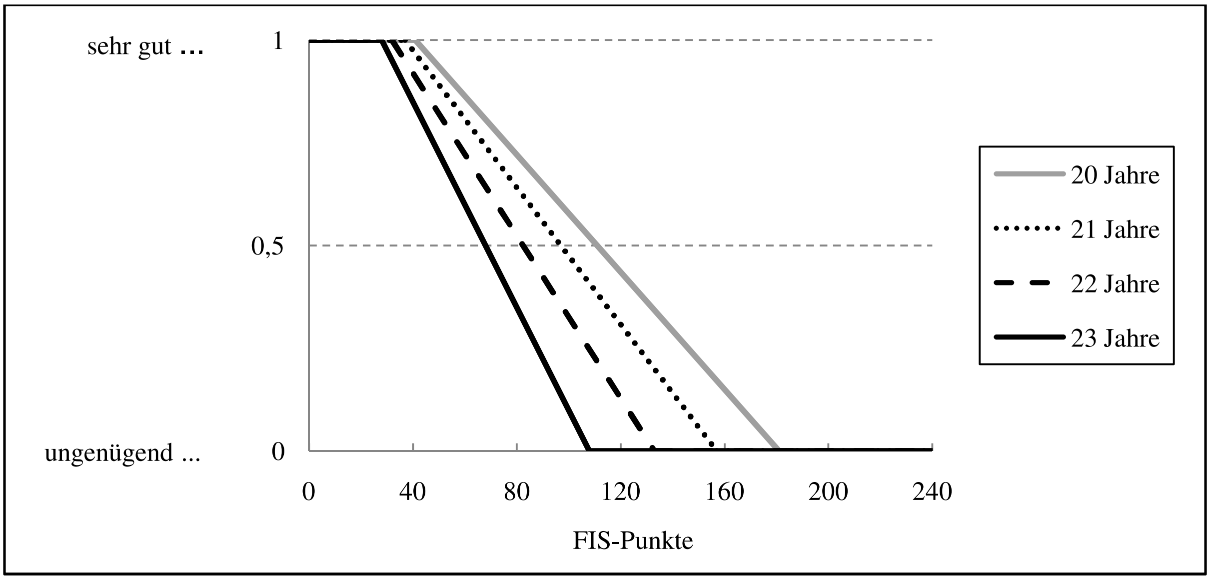

Abb. 4-4: *Dreiecksfunktionen für eine altersmäßige FIS-Punkt-Bewertung*

Dem dargestellten Zugehörigkeitsverlauf ist zu entnehmen, dass die Leistung eines 20-jährigen Sportlers beim Erreichen von 110 FIS-Punkten als „befriedigend“ $\mu_{20}(110) = 0{,}5$; im nachfolgenden Jahr bei gleicher Punktzahl jedoch nur als „ausreichend“ bezeichnet werden würde $\mu_{21}(110) = 0{,}4$.

Die Bewertung aller Distanz-FIS-Punkte ermöglicht eine Quantifizierung der Leistungsentwicklung des Sportlers.

Da sich der Begriff „Bewertung“ in der gesamten Arbeit widerspiegelt, wird im Weiteren dafür die Bezeichnung B verwendet.

${B_W}^{(j)}$ bezeichnet die Bewertungsfunktion der Wettkampfleistung W, die für jedes Jahr j die konkret erreichten Distanz-FIS-Punkte $P^{(j)}$ des j-ten Jahres quantifiziert.
Unter der Vereinbarung, dass die erreichten FIS-Punkte im j-ten Jahr mit der zugehörigen charakteristischen Funktion für das j-te Jahr bewertet werden, wird die benannte Bezeichnung vereinfacht durch ${B_W}^{(j)}(P)$.

Die altersabhängige Leistungsmodellierung soll anhand des nachfolgenden Beispiels verdeutlicht werden.

Beispiel 4-1:
Es wurden die Distanz-FIS-Punktwerte eines Sportlers im Altersbereich von 17 bis 19 Jahren betrachtet. Die realisierten FIS-Punkte wurden gemäß Tabelle 4-2 mit Hilfe von Zugehörigkeitsfunktionen bewertet. Die berechneten Bewertungskenngrößen und die dazugehörigen FIS-Punkte werden in der nachfolgenden Tabelle angegeben.

Tab. 4-3: *realisierte FIS-Punktwerte und Bewertungskenngrößen eines Sportlers*

Alter	Distanz-FIS-Punkte	Bewertung
17	155,77	0,493
18	106,10	0,688
19	79,27	0,790

Die Bewertungskenngrößen verdeutlichen eine Leistungssteigerung des Sportlers in allen 3 Jahren, die über der altersmäßigen Leistungsentwicklung liegt. Diese Leistungsentwicklung wurde in Abbildung 4-5 dargestellt.

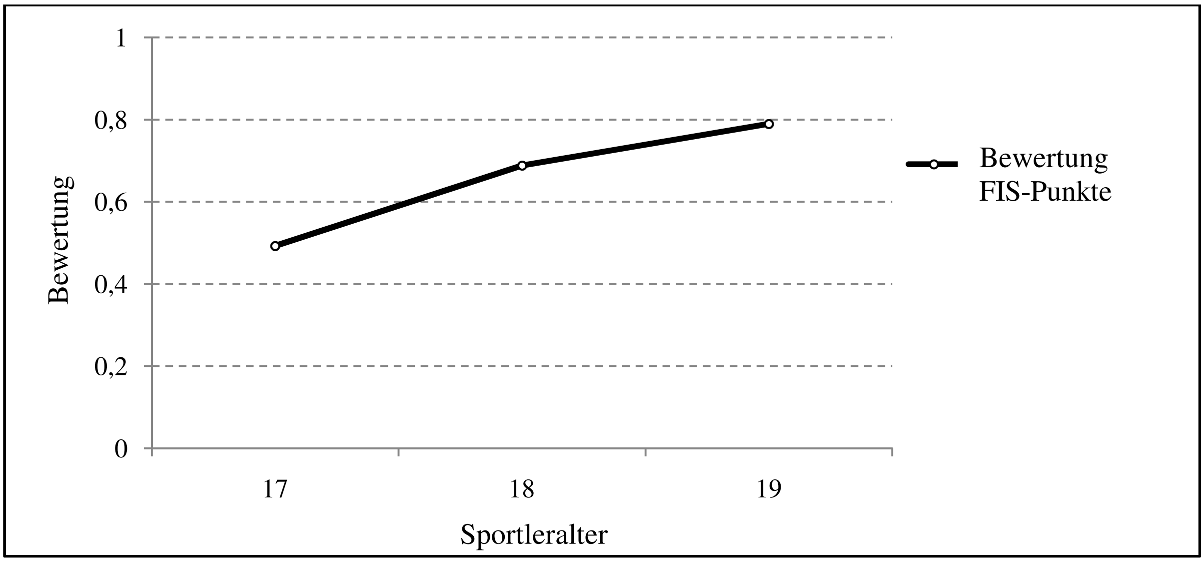

Abb. 4-5: *Leistungsmodellierung mittels fuzzy-basierter Wettkampfbewertung*

Die lineare Verbindung zweier benachbarter Punkte dient lediglich zur Visualisierung des Leistungsverlaufes.

4.2 Trainingsmodellierung

Die sportliche Leistungsfähigkeit ist neben genetisch bedingten Voraussetzungen, Leistungs- und Energiereserven sowie dem körperlichen Wohlbefinden im Wesentlichen abhängig vom Training des Sportlers. Zur Erhaltung und Verbesserung der Leistungsfähigkeit muss das Training optimal gestaltet werden. Je wirksamer es dabei ausgeführt wurde, umso besser sollte die Wettkampfleistung hervorgehen. Hat man demnach eine Trainingsbewertung zur Charakterisierung des Erfüllungsgrades der Aussage „Das Training war wirksam für die Leistung", so erwartet man eine hohe Korrelation zwischen den Maßzahlen der Trainings- und Wettkampfbewertung.

4.2.1 Gesamttrainingsbewertung

Zur Quantifizierung der Aussage „Das Training war wirksam" wird in Analogie zur Wettkampfbewertung für jede Trainingsperiode das Gesamttraining mit Hilfe von Zugehörigkeitsfunktionen bewertet.
Im Gegensatz zur Bewertung der Wettkampfleistung wurde die Gesamttrainingsbewertung mit Hilfe zweiseitiger Dreiecksfunktionen realisiert. Nach sportwissenschaftlichen Erfahrungen wirkt ein zu geringer als auch zu hoher Trainingsumfang leistungshemmend. Die Festlegung der unteren und oberen Bewertungsgrenze erfolgt durch den Anwender.
Laut Rahmentrainingsplan (RTP) ist das Training am „wirksamsten", je besser die Richtwerte des vorgegebenen RTP erfüllt werden. Demzufolge erfolgt die Festlegung der Toleranz der Dreiecksfunktion anhand dieser Werte. Eine gleichmäßige Steigerung des Gesamttrainingsumfangs mit zunehmenden Sportleralter im betrachteten Zeitraum von 15 bis 26 Jahren wurde durch Verschiebung der Toleranz berücksichtigt. Der Anstieg der Flanken und somit die Form der charakteristischen Funktion wurden beibehalten.

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Vorschlag eines Zugehörigkeitsverlaufes für die Bewertung der Trainingsdaten eines Sportlers. Die Grenzen der Dreiecksfunktion wurden subjektiv festgelegt: Das Training soll als „unwirksam" bezeichnet und mit dem Zugehörigkeitsgrad 0 bewertet werden, wenn sowohl 120 Stunden mehr als auch 120 Stunden weniger vom Idealwert laut RTP ausgeübt werden.

Tab. 4-4: *Parameterfestlegung der Dreiecksfunktion für die Bewertung des GTU*

Bewertung des Gesamttrainingsumfangs Angaben in Stunden			
Alter	**unwirksam** untere Grenze	**sehr wirksam** Werte des RTP	**unwirksam** obere Grenze
17	500	620	740
18	540	660	780
19	600	720	840
20	640	760	880
21	695	815	935

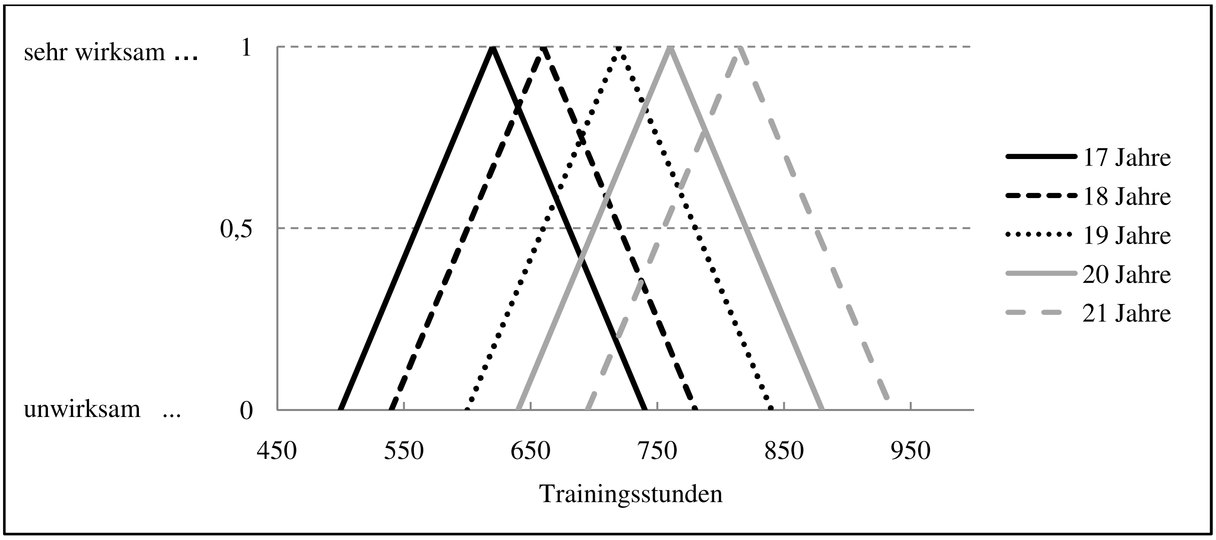

Abb. 4-6: *Dreiecksfunktionen für eine altersmäßige Gesamttrainingsbewertung*

In Analogie zur Bewertung der Distanz-FIS-Punkte wurden die Gesamttrainingsumfänge des Sportlers aus Beispiel 4-1 im angegebenen Altersbereich mit Hilfe der dargestellten charakteristischen Funktionen bewertet und tabelliert.

Tab. 4-5: *Bewertung GTU auf der Grundlage subjektiv gewählter Grenzen*

Alter	***Gesamttrainings-umfang in h***	***Bewertung***
17	546,86	0,390
18	596,44	0,470
19	667,45	0,562

4.2.2 Korrelation zwischen Trainings- und Wettkampfleistung

Der Zusammenhang zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung lässt sich, wenn auch auf sehr triviale Weise, beschreiben.

WENN die Trainingsbelastung wirksam ist,
DANN ist die Wettkampfleistung gut.

Gesucht wird also eine Bewertung der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung, sodass diese möglichst gut übereinstimmen.

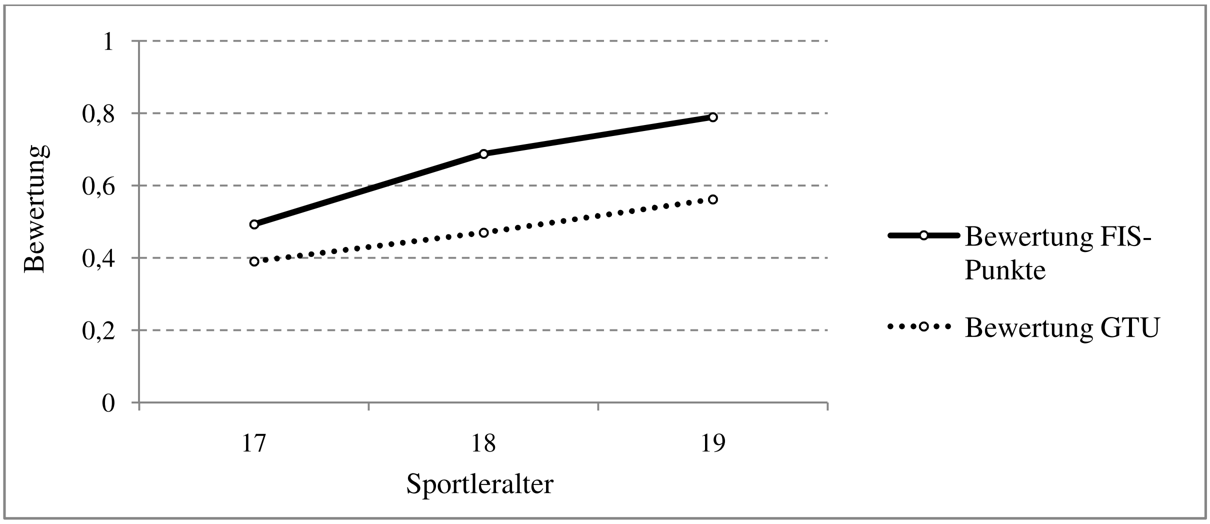

Abb. 4-7: *Vergleich der Bewertungen von Wettkampfleistung und Trainingsbelastung (auf der Grundlage subjektiv gewählter Grenzen)*

Als Kriterium für eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen der Bewertung des Gesamttrainings und der Bewertung der Wettkampfleistung wird die Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung der Bewertungen angesehen.

Wird mit ${B_{GTU}}^{(j)}({h_{GTU}}^{(j)})$ die Bewertung des GTU im Jahre j, gemessen in Trainingsstunden ${h_{GTU}}^{(j)}$ bezeichnet, so hieße dies

$$\sum_j \left({B_{GTU}}^{(j)}({h_{GTU}}^{(j)}) - {B_W}^{(j)}(P^{(j)})\right)^2 \rightarrow min$$

Die mittlere quadratische Abweichung im Beispiel 4-1 für die betrachteten 3 Jahre beträgt 0,110.

Die Abbildung zeigt, dass der Abstand der Bewertungen des Gesamttrainings und der Wettkampfleistung nicht minimal ist. Würde man beispielsweise die Bewertungen des GTU

verschieben, sodass die Bewertung des GTU mit der Bewertung der Wettkampfleistung im 17. Jahr übereinstimmt, so würde man offensichtlich eine bessere Übereinstimmung erzielen.
Mit Hilfe eines sukzessiven Suchverfahrens wurde die bestmögliche Übereinstimmung zwischen der Bewertung der Wettkampfleistung und der Gesamttrainingsbelastung realisiert: Während die Bewertung der Wettkampfleistung unverändert bleibt, werden die Grenzen der Dreiecksfunktion zur Bewertung des GTU so gewählt, dass die Abweichung zwischen den Bewertungen der Leistung und des GTU für alle berücksichtigten Jahre minimiert wird.

Da die Gesamttrainingsumfänge aller 3 Jahre unterhalb der Werte des Rahmentrainingsplans liegen und somit die Bewertung des Trainings anhand der linken Flanke der Dreiecksfunktion erfolgt, wird lediglich die untere Grenze benötigt. Bezogen auf das 17. Sportleralter ergibt sich ein Wert von 448 Stunden. Die Grenzen für die Jahre 18 und 19 gehen aus der Verschiebung der Dreiecksfunktion hervor.

Tab. 4-6: *Bewertung GTU auf der Grundlage angepasster Grenzen*

Alter	***Gesamttrainings-umfang in h***	***Bewertung***
17	546,86	0,575
18	596,44	0,630
19	667,45	0,694

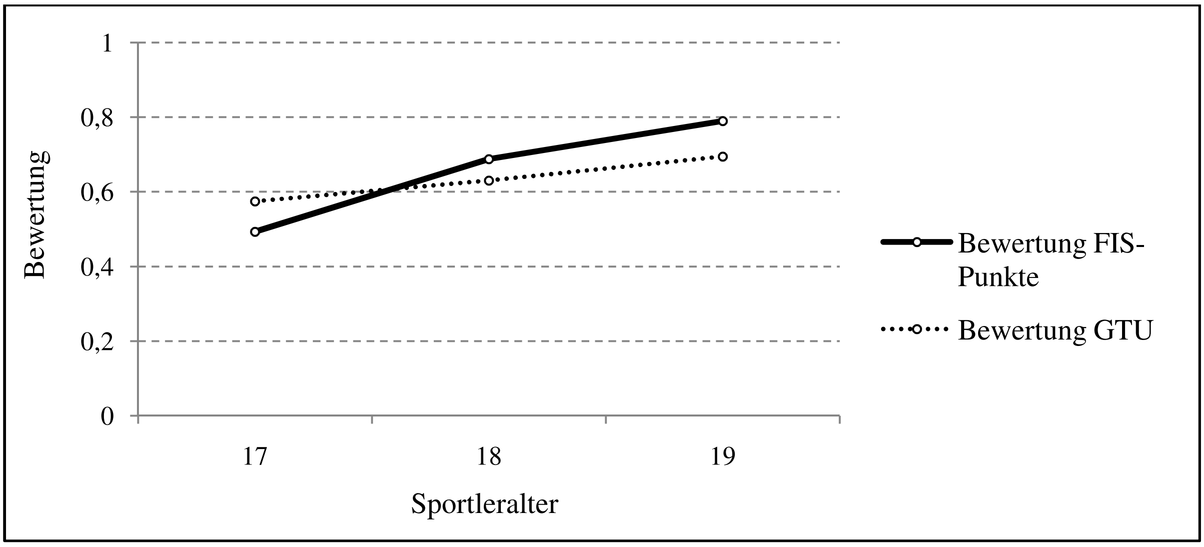

Abb. 4-8: *Vergleich der Bewertungen von Wettkampfleistung und Trainingsbelastung (auf der Grundlage angepasster Grenzen)*

Die mittlere quadratische Abweichung lässt sich durch eine gezielte Anpassung auf einen Wert von 0,002 reduzieren.

Gelingt die Übereinstimmung der Wettkampfleistung und des Gesamttrainings in hohem Maße, so lässt sich der Zusammenhang „Je wirksamer das Gesamttraining, desto besser die Wettkampfleistung" quantitativ beschreiben:
Je höher der Anstieg in der Bewertung des GTU ist, desto höher ist der Anstieg in der Bewertung des Wettkampferfolges. Für die Formulierung in umgekehrter Weise bedeutet dies: Je mehr sich die Bewertung des GTU verringert, desto mehr sinkt die Bewertung der Wettkampfleistung.

Die Modellierung des Zusammenhanges zwischen der Trainingsbelastung und der Wettkampfleistung aufgrund des GTU erscheint aus Anwendersicht nicht ausreichend. Um die Struktur des Trainings bei der Modellierung zu berücksichtigen, wird das Gesamttraining inhaltlich weiter unterteilt und analysiert.

4.3 Auswertung der Trainingsstruktur

Nach Abbildung 3-5 untergliedert sich der GTU in die geleisteten Stunden des allgemeinen und speziellen Trainings. Somit erscheint die Aussage plausibel:

WENN der zeitliche Umfang h_{spez} des speziellen Trainings (spez) wirksam ist
UND
WENN der zeitliche Umfang h_{allg} des allgemeinen Trainings (allg) wirksam ist
DANN ist der zeitliche Umfang $h_{GTU} = h_{spez} + h_{allg}$ des Gesamttrainings (GTU) wirksam

Gelingt es, die Wirksamkeit des speziellen und allgemeinen Trainings mit Hilfe geeigneter Zugehörigkeitsfunktionen zu beschreiben, so kann dieser Zusammenhang nach dem Ansatz von Sugeno durch eine Linearkombination der entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen modelliert werden.

Das regelbasierte System von Sugeno /10/ lässt sich allgemein schreiben als:

R^i: WENN $e_1 = A^i{}_1$ UND ... UND $e_k = A^i{}_k$, DANN $y_i = a^i{}_0 + a^i{}_1 \cdot e_1 + \cdots + a^i{}_k \cdot e_k$

mit

e_j scharfe Eingangswerte $(j = 1, \ldots, k)$
A_j unscharfe Mengen $(j = 1, \ldots, k)$
$a^i{}_j$ Parametergewichte der e_j $(j = 1, \ldots, k)$
y_i zur i-ten Regel gehörige Ausgangsgröße $(i = 1, \ldots, n)$

Die Umsetzung des Sugeno-Ansatzes auf das Trainingsproblem lautet

$$B_{GTU}{}^{(j)}\left(h_{GTU}{}^{(j)}\right) = b_1 \cdot B_{spez}{}^{(j)}\left(h_{spez}{}^{(j)}\right) + b_2 \cdot B_{allg}{}^{(j)}\left(h_{allg}{}^{(j)}\right)$$ für alle berücksichtigen Trainingsjahre j

Gesucht werden die Koeffizienten b_1 und b_2, sodass sich die Bewertung der Wirksamkeit des Gesamttrainings durch die gewichtete Summe der Bewertungen der Wirksamkeit des speziellen und allgemeinen Trainings darstellen lässt.

Beispiel 4-2:
Die geleisteten Stunden des speziellen und allgemeinen Trainings für die Sportleralter 17 bis 19 wurden mit Hilfe subjektiv festgelegter Zugehörigkeitsfunktionen bewertet. Die Bewertungen des GTU entsprechen den Werten aus Tabelle 4-6.

Tab. 4-7: *bewertete Stundenumfänge des Gesamttrainings, speziellen sowie allgemeinen Trainings für 3 Sportlerjahre*

$Alter$	B_{GTU}	B_{spez}	B_{allg}
17	0,575	0,650	0,250
18	0,630	0,800	0,500
19	0,694	0,700	0,600

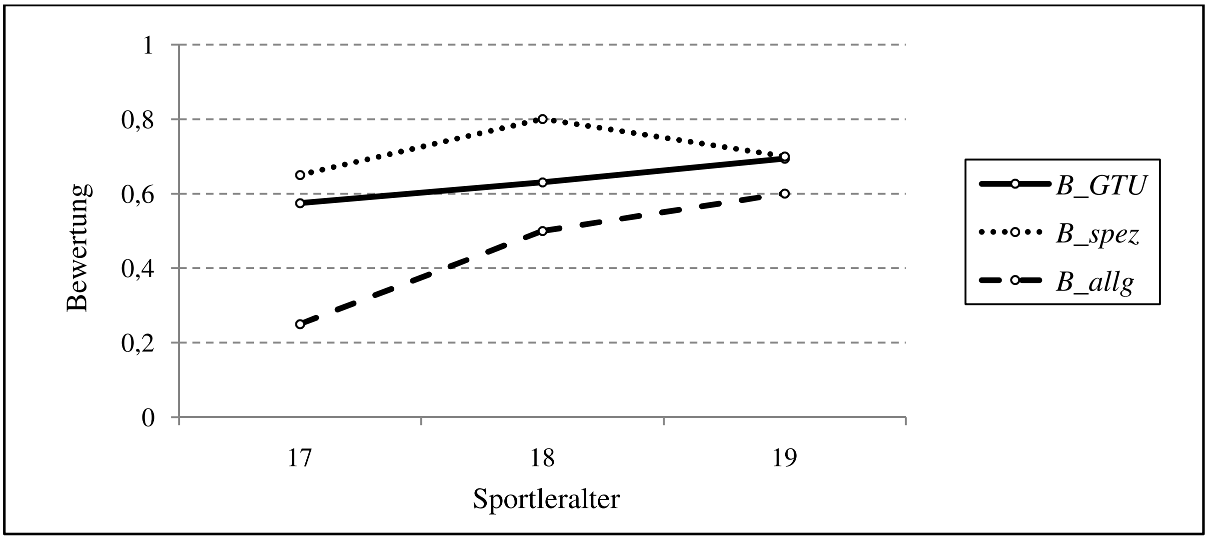

Abb. 4-9: *Bewertungen des GTU, speziellen und allgemeinen Trainings*

Werden bei der Modellierung, wie im Beispiel 4-2 ersichtlich, mehr als 2 Jahre berücksichtigt, so handelt es sich bei

$$B_{GTU}{}^{(j)}\left(h_{GTU}{}^{(j)}\right) = b_1 \cdot B_{spez}{}^{(j)}\left(h_{spez}{}^{(j)}\right) + b_2 \cdot B_{allg}{}^{(j)}(h_{allg}{}^{(j)})$$ für alle berücksichtigten Trainingsjahre j

um ein überbestimmtes Gleichungssystem. Die Koeffizienten b_1 und b_2 werden auf der Grundlage der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt, sodass die Abweichung zwischen der Bewertung des GTU und der Bewertung des speziellen und allgemeinen Trainings für jedes Trainingsjahr j minimiert werden soll.

Die daraus resultierende Optimierungsaufgabe lautet

$$f(b_1, b_2) = \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - (b_1 \cdot B_{spez}{}^{(j)} + b_2 \cdot B_{allg}{}^{(j)})\right)^2 \to min$$
$$g_1(b_1) \ = b_1 \ \geq 0$$
$$g_2(b_2) \ = b_2 \ \geq 0$$

Die eingeführten Symboliken $B_{GTU}{}^{(j)}(h_{GTU}{}^{(j)})$, $B_{spez}{}^{(j)}(h_{spez}{}^{(j)})$ und $B_{allg}{}^{(j)}(h_{allg}{}^{(j)})$ werden aus Übersichtlichkeitsgründen in der Optimierungsaufgabe vereinfacht durch $B_{GTU}{}^{(j)}, B_{spez}{}^{(j)}$ und $B_{allg}{}^{(j)}$ geschrieben.

Das Optimierungsproblem wird nach dem Verfahren von Karush-Kuhn-Tucker gelöst.

Die theoretischen Ableitungen zur Lösung der Optimierungsaufgabe orientieren sich an dem Buch „Nichtlineare Optimierung“ von Prof. Dr. K.-H. Elster /11/.

4.4 Lösungsverfahren nach Karush-Kuhn-Tucker

Bei der zu lösenden Aufgabe handelt es sich um ein Optimierungsproblem mit linearen Ungleichungsnebenbedingungen (PLU).

$$(PLU)\begin{cases} f(x) \to \min & \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{cases}$$

Die Lösung von Optimierungsproblemen mit Ungleichungsrestriktionen wurde 1951 in einer Arbeit von Kuhn und Tucker angegeben.

Kuhn und Tucker formulieren Bedingungen für die Optimalität einer Lösung des Optimierungsproblems. Aus diesem Grund nennt man die Optimalitätsbedingungen auch Kuhn-Tucker-Bedingungen. Später entdeckte man, dass dieses Resultat bereits 1939 von Karush bewiesen wurde, weswegen die Optimalitätsbedingungen oft auch als Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (im Nachfolgenden nur noch als KKT-Bedingungen bezeichnet) benannt werden.
Die KKT-Theorie stellt eine Erweiterung der klassischen Multiplikatorenregel von Lagrange dar, indem die Nebenbedingungen in der Lagrangefunktion berücksichtigt werden.
Durch die Anwendung der Multiplikatorenregel von Lagrange erhält man das zum Extremalproblem zugehörige Sattelpunktproblem.

Definition 4-1: Sattelpunkt
Es sei $F: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $(x^*, \lambda^*)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ heißt Sattelpunkt der Funktion $F(x, \lambda)$, wenn gilt:
$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^m$

Beispiel 4-3:
Die Funktion $F(x, \lambda) = x^2 - \lambda^2, (x, \lambda)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besitzt den Sattelpunkt $(x^*, \lambda^*)^T = (0{,}0)$, da
$F(x^*, \lambda) = -\lambda^2 \leq F(x^*, \lambda^*) = 0 \leq F(x, \lambda^*) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
Das heißt, in $(x^*, \lambda^*)^T = (0{,}0)$ liegt für die Funktion $F(x, \lambda)$ ein Maximum bezüglich λ und ein Minimum bezüglich x.

Definition 4-2: Sattelpunktproblem (SP)
Gegeben sei die Lagrangefunktion L des Optimierungsproblems (PLU), in der die Zielfunktion und die gewichteten Nebenbedingungen in einem funktionalen Ausdruck zusammengefasst werden.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x)$$

mit $(x, \lambda)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$

Die Gewichtungen $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ werden als Langrange-Multiplikatoren bezeichnet.

Gesucht sind ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ und ein $\lambda^* \in \mathbb{R}_+{}^m$, sodass $(x^*, \lambda^*)^T$ Sattelpunkt der Lagrangefunktion ist.

Den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Probleme (SP) und (PLU) zeigen sich in den globalen und lokalen KKT-Bedingungen:

4.4.1 Globalen KKT-Bedingungen

Satz 4-1:

Ist $(x^*, \lambda^*)^T$ die Lösung von (SP), dann ist x^* die Lösung von (PLU).

Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht, sondern erst, wenn die Gültigkeit einer Regularitätsbedingung erfüllt ist. Genannt werden soll hier die Regularitätsbedingung von SLATER.

Definition 4-3: SLATER-Bedingung

Es sei $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \forall i = 1, \dots, m.$

Es existiert mindestens ein $\bar{x} \in G$ (G ... Restriktionsbereich von (PLU)) mit $g_i(\bar{x}) < 0, \forall i = 1, \dots, m.$

Das heißt, G besitzt mindestens einen inneren Punkt.

Satz 4-2:

Im Optimierungsproblem (PLU) seien die Funktionen $f, g_i, i = 1, \dots, m$ konvex und die SLATER-Bedingung erfüllt. Dann gilt

$x^* \in G$ Lösung von $(PLU) \Leftrightarrow \exists \lambda^* \in {\mathbb{R}_+}^m$, sodass $(x^*, \lambda^*)^T$ Lösung von (SP)

Definition 4-4: konvexe Funktionen

Die Funktion $f: K \to \mathbb{R},\ K$... konvexe Menge mit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $K \neq \emptyset$ heißt konvex, wenn gilt

$$f\left(\alpha \cdot x^{(1)} + (1-\alpha) \cdot x^{(2)}\right) \leq \alpha \cdot f(x^{(1)}) + (1-\alpha) \cdot f(x^{(2)})$$
$$\forall\, x^{(1)}, x^{(2)} \in K$$
$$\forall\, \alpha \in [0,1]$$

4.4.2 Lokale KKT-Bedingungen

Eine Lösung des Problems (PLU) soll dadurch charakterisiert werden, dass die im Sattelpunktproblem definierte Funktion L an einer Stelle $(x^*, \lambda^*)^T$ untersucht wird. Dies gelingt für differenzierbare Funktionen $f, g_i, i = 1, \dots, m$ und führt auf die sogenannten lokalen KKT-Bedingungen.

Es seien f und $g_i, i = 1, \dots, m$ partiell differenzierbare Funktionen.

Gesucht sind $(x^*, \lambda^*)^T \in \mathbb{R}^n \times {\mathbb{R}_+}^m$, sodass gilt:

[1] $\quad \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad$ mit $\quad \nabla_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n})^T$

[2] $\quad \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) \leq 0 \quad$ mit $\quad \nabla_\lambda L = (L_{\lambda_1}, \dots, L_{\lambda_n})^T$

[3] $\quad {\lambda^*}^T \cdot \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$

Die KKT-Bedingungen führen auf ein System von Gleichungen und Ungleichungen.

[1] $$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^* \cdot \nabla g_i(x^*) = 0$$

mit $\nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f}{x^*{}_1}, \dots, \frac{\partial f}{x^*{}_n}\right), \nabla g_i(x^*) = \left(\frac{\partial g_i}{x^*{}_1}, \dots, \frac{\partial g_i}{x^*{}_n}\right)$

[2] $g_i(x^*) \leq 0 \qquad i = 1, \dots, m$

[3] $$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^* \cdot g_i(x^*) = 0$$

$\lambda_i{}^* \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m$

Aus Bedingung [3] folgt

$\lambda_i{}^* \cdot g_i(x^*) = 0 \;\; \forall i = 1, \dots, m$

Daraus folgt wiederum:

Entweder eine Ungleichungsnebenbedingung ist in x^* aktiv (d.h. $g_i(x^*) = 0$) oder sie ist inaktiv (d.h. $g_i(x^*) < 0$) und somit $\lambda_i{}^* = 0$.

Satz 4-3:

Sind f und $g_i, i = 1, \dots, m$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$(x^*, \lambda^*)^T$ Lösung von $(SP) \Longrightarrow (x^*, \lambda^*)^T$ erfüllt KKT-Bedingungen

Satz 4-4:

Sind f und $g_i, i = 1, \dots, m$ konvex und stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$(x^*, \lambda^*)^T$ Lösung von $(SP) \Longleftrightarrow (x^*, \lambda^*)^T$ erfüllt KKT-Bedingungen

Satz 4-5: Karush-Kuhn-Tucker-Satz

Ist die SLATER-Bedingung erfüllt und sind f und $g_i, i = 1, \dots, m$ konvex und stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$x^* \in G$ Lösung von $(PLU) \Longleftrightarrow \exists \lambda^* \in \mathbb{R}_+{}^m$, sodass $(x^*, \lambda^*)^T$ die KKT-Bedingungen erfüllt

4.4.3 Anwendung der KKT-Theorie auf die Modellgleichung

$$f(b_1, b_2) = \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - (b_1 \cdot B_{spez}{}^{(j)} + b_2 \cdot B_{allg}{}^{(j)})\right)^2 \rightarrow min$$

$$g_1(b_1) \;=\; -b_1 \;\leq 0$$

$$g_2(b_2) \;=\; -b_2 \;\leq 0$$

Für die vorliegende Optimierungsaufgabe lauten die Lagrangefunktion und die KKT-Bedingungen:

$$L(b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - b_1 \cdot B_{spez}{}^{(j)} - b_2 \cdot B_{allg}{}^{(j)}\right)^2 - \lambda_1 \cdot b_1 - \lambda_2 \cdot b_2$$

[1] $\nabla_{b_1} L(b_1{}^*, b_2{}^*, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) = 0$

$$-2 \cdot \sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - b_1{}^* \cdot B_{spez}{}^{(j)} - b_2{}^* \cdot B_{allg}{}^{(j)}\right) - \lambda_1{}^* = 0$$

$\nabla_{b_2} L(b_1{}^*, b_2{}^*, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) = 0$

$$-2 \cdot \sum_j B_{allg}{}^{(j)} \cdot \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - b_1{}^* \cdot B_{spez}{}^{(j)} - b_2{}^* \cdot B_{allg}{}^{(j)}\right) - \lambda_2{}^* = 0$$

[2] $\nabla_{\lambda_1} L(b_1{}^*, b_2{}^*, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) \leq 0$

$-b_1{}^* \leq 0$

$\nabla_{\lambda_2} L(b_1{}^*, b_2{}^*, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) \leq 0$

$-b_2{}^* \leq 0$

[3] $\lambda_1{}^{*T} \cdot \nabla_{\lambda_1} L(b_1{}^*, b_2{}^*, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) = 0$

$-\lambda_1{}^* \cdot b_1{}^* = 0$

$\lambda_2{}^{*T} \cdot \nabla_{\lambda_2} L(b_1{}^*, b_2{}^*, \lambda_1{}^*, \lambda_2{}^*) = 0$

$-\lambda_2{}^* \cdot b_2{}^* = 0$

sowie

$\lambda_1{}^* \geq 0$

$\lambda_2{}^* \geq 0$

Zu prüfen sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes von KKT.
Da $f(b_1, b_2)$ eine quadratische und $g_1(b_1)$ und $g_2(b_2)$ lineare Funktionen sind, ist die Forderung nach Konvexität und stetig partieller Differenzierbarkeit erfüllt.

Für die Erfüllung der SLATER-Bedingung lässt sich mindestens ein innerer Punkt des Restriktionsbereiches finden. Als Beispiel hierfür kann $\overline{b_1} = 0{,}5$ und $\overline{b_2} = 0{,}5$ benannt werden, denn

$$g_1(\overline{b_1}) = -0{,}5 < 0$$
$$g_2(\overline{b_2}) = -0{,}5 < 0$$

Alle Lösungen des entstandenen Systems aus Gleichungen und Ungleichungen werden mittels Fallunterscheidungen ermittelt. Es wird geprüft, ob die Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe und die Nichtnegativitätsforderung an $\lambda_1{}^*$ und $\lambda_2{}^*$ erfüllt sind.
Die Lösung der Optimierungsaufgabe liegt somit in einen der betrachteten Fälle. Alle Fallunterscheidungen und Berechnungen sind im Anhang ersichtlich.

Mit Hilfe des Verfahrens von Karush-Kuhn-Tucker wurden die Koeffizienten b_1 und b_2 bestimmt.

Für die Lösbarkeit der Optimierungsaufgabe muss gefordert werden:

- $j \geq 2$
  Es müssen die Sportlerdaten von mindestens 2 Jahren zur Verfügung stehen.

- Für jedes Sportlerjahr muss gefordert werden, dass sich die Bewertung des speziellen Trainings nicht als Vielfaches der Bewertung des allgemeinen Trainings und umkehrt schreiben lässt.

Der Beweis beider Forderungen befindet sich im Anhang.

Die Bestimmung der Koeffizienten für Beispiel 4-2 liefern die Werte $b_1 = 0{,}73$ und $b_2 = 0{,}24$. Infolgedessen ergeben sich die modellierten Bewertungen für das Gesamttraining.

Tab. 4-8: *modellierte Gesamttrainingsbewertung*

$\boldsymbol{Alter}$	$\boldsymbol{B_{GTU}}$
17	0,532
18	0,701
19	0,653

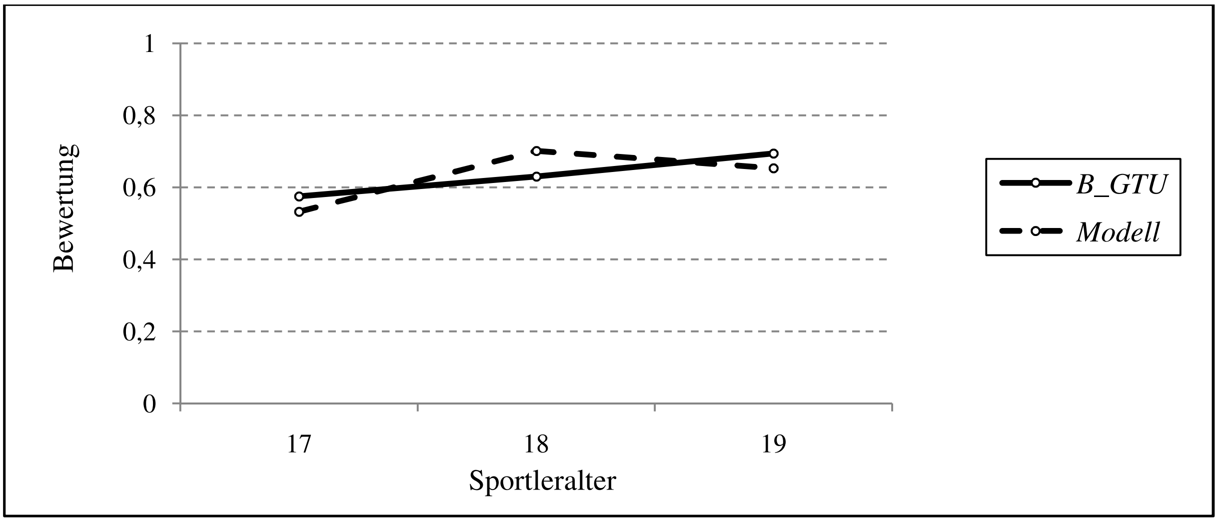

Abb. 4-10: *Vergleich der Bewertungen des GTU und des Modells (aus B_spez und B_allg)*

Die mittlere quadratische Abweichung beträgt 0,0086. Angesichts der guten Übereinstimmung zwischen der Bewertung der Gesamttrainingsbelastung und des Modells kann die Bewertung der Wettkampfleistung auf der Grundlage des allgemeinen und speziellen Trainings beschrieben werden.

Die vorgestellte Modellgleichung kann nun weiter vertieft werden, indem das Training gemäß der dargestellten Struktur in Abbildung 3-5 in Ausdauer- (A), Kraft- (K) und Ergänzungstraining (E) unterteilt wird.

In Analogie zur Unterteilung des Gesamttrainings lässt sich in einfacher Weise das spezielle und allgemeine Training präzisieren, sodass die nachfolgende Aussage Gültigkeit hat.

Das spezielle Training ist umso wirksamer, je wirksamer die jeweiligen Trainingskomponenten sind, aus denen es zusammengesetzt ist, also

WENN der zeitliche Umfang h_{spezA} des speziellen Ausdauertrainings $spezA$ wirksam ist

UND

WENN der zeitliche Umfang h_{spezK} des speziellen Krafttrainings $spezK$ wirksam ist

DANN ist der zeitliche Umfang $h_{spez} = h_{spezA} + h_{spezK}$ des speziellen Trainings $spez$ wirksam

Nach dem Ansatz von Sugeno kann dieser Zusammenhang modelliert werden durch:

$$B_{spez}{}^{(j)}\left(h_{spez}{}^{(j)}\right) = p_1 \cdot B_{spezA}{}^{(j)}\left(h_{spezA}{}^{(j)}\right) + p_2 \cdot B_{spezK}{}^{(j)}\left(h_{spezK}{}^{(j)}\right)$$

Diese Aussagen werden auf das allgemeine Training übertragen.

$$B_{allg}{}^{(j)}\left(h_{allg}{}^{(j)}\right) = q_1 \cdot B_{allgA}{}^{(j)}\left(h_{allgA}{}^{(j)}\right) + q_2 \cdot B_{allgK}{}^{(j)}\left(h_{allgK}{}^{(j)}\right) + q_3 \cdot B_{allgE}{}^{(j)}\left(h_{allgE}{}^{(j)}\right)$$

Die Bestimmung der Koeffizienten q_1, q_2 und q_3 erfolgt in analoger Weise mit Hilfe des Verfahrens von KKT.
Die Methodik zur Schätzung zweier Koeffizienten lässt sich entsprechend auf die Schätzung mehrerer Koeffizienten übertragen.

Entsprechend der Trainingszusammensetzung im Skilanglauf könnte das Training nunmehr weiter in die 15 Komponenten der untersten Ebene des Trainingsbaumes unterteilt werden. Im Rahmen der Praktikumsarbeit /12/ erschien es angesichts der Vielzahl an Komponenten in Abstimmung mit dem IAT Leipzig für die Modellbildung fassbarer, die letzte Ebene im Trainingsaufbau unberücksichtigt zu lassen und lediglich die Unterteilung in 5 Komponenten zu betrachten.

Die Wirksamkeit des Gesamttrainings wird folglich durch die Wirksamkeit der einzelnen Trainingskomponenten beschrieben:

$$B_{GTU}{}^{(j)}\left(h_{GTU}{}^{(j)}\right) = a_1 \cdot B_{spezA}{}^{(j)}\left(h_{spezA}{}^{(j)}\right) + a_2 \cdot B_{spezK}{}^{(j)}\left(h_{spezK}{}^{(j)}\right) + a_3 \cdot B_{allgA}{}^{(j)}\left(h_{allgA}{}^{(j)}\right)$$
$$+a_4 \cdot B_{allgK}{}^{(j)}\left(h_{allgK}{}^{(j)}\right) + a_5 \cdot B_{allgE}{}^{(j)}\left(h_{allgE}{}^{(j)}\right)$$

mit $a_1 = b_1 \cdot p_1$, $a_2 = b_1 \cdot p_2$, $a_3 = b_2 \cdot q_1$, $a_4 = b_2 \cdot q_2$, $a_5 = b_2 \cdot q_3$

Der quantitative Zusammenhang zwischen der Trainingsbelastung und der Wettkampfleistung lässt sich schließlich beschreiben durch:

$$B_W{}^{(j)}(P^{(j)}) = a_1 \cdot B_{spezA}{}^{(j)}\left(h_{spezA}{}^{(j)}\right) + a_2 \cdot B_{spezK}{}^{(j)}\left(h_{spezK}{}^{(j)}\right) + a_3 \cdot B_{allgA}{}^{(j)}\left(h_{allgA}{}^{(j)}\right)$$
$$+a_4 \cdot B_{allgK}{}^{(j)}\left(h_{allgK}{}^{(j)}\right) + a_5 \cdot B_{allgE}{}^{(j)}\left(h_{allgE}{}^{(j)}\right)$$

An dieser Stelle soll auf die Berechtigung der schrittweisen Optimierung der Trainingskomponenten hingewiesen werden. Unter der Annahme, der Zusammenhang zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung aller 15 Komponenten der untersten Ebene des Trainingsbaumes solle quantifiziert werden, würde sich nachfolgende Modellgleichung ergeben.

$$B_W{}^{(j)}\left(P^{(j)}\right) = a_1 \cdot B_{WK}{}^{(j)}\left(h_{WK}{}^{(j)}\right) + a_2 \cdot B_{GB}{}^{(j)}\left(h_{GB}{}^{(j)}\right) + a_3 \cdot B_{EB}{}^{(j)}\left(h_{EB}{}^{(j)}\right) + \ldots +$$
$$a_{14} \cdot B_{Gym}{}^{(j)}\left(h_{Gym}{}^{(j)}\right) + a_{15} \cdot B_{Spiel}{}^{(j)}\left(h_{Spiel}{}^{(j)}\right)$$

Eine globale Optimierung setzt eine große Anzahl an Sportlerjahren voraus, während für die Modellierung zum Teil nur wenige Trainingsjahre zur Verfügung standen.

Beispiel 4-4:

Gelingt es, die Komponenten des Trainingsbaumes geeignet durch Zugehörigkeitsfunktionen zu bewerten und entsprechend den aufgeführten Modellgleichungen zu gewichten, so lassen sich die Koeffizienten a_i berechnen. Beispielhaft sollen die Bewertungen der 5 benannten Trainingskomponenten TK und deren Gewichtsanteile aufgeführt und das daraus resultierende Modell dargestellt werden.

Tab. 4-9: *Zahlenbeispiel zur Modellgleichung der Trainingswirkungsanalyse*

		B_{GTU}	B_{spezA}	B_{spezK}	B_{allgA}	B_{allK}	B_{allgE}	$Modell$
	a_i		0,555	0,016	0,017	0,189	0,014	
Alter								
17		0,575	0,905	0,074	0,041	0,291	0,320	0,564
18		0,630	0,911	0,339	0,074	0,603	0,362	0,632
19		0,694	0,959	0,603	0,173	0,717	0,433	0,687

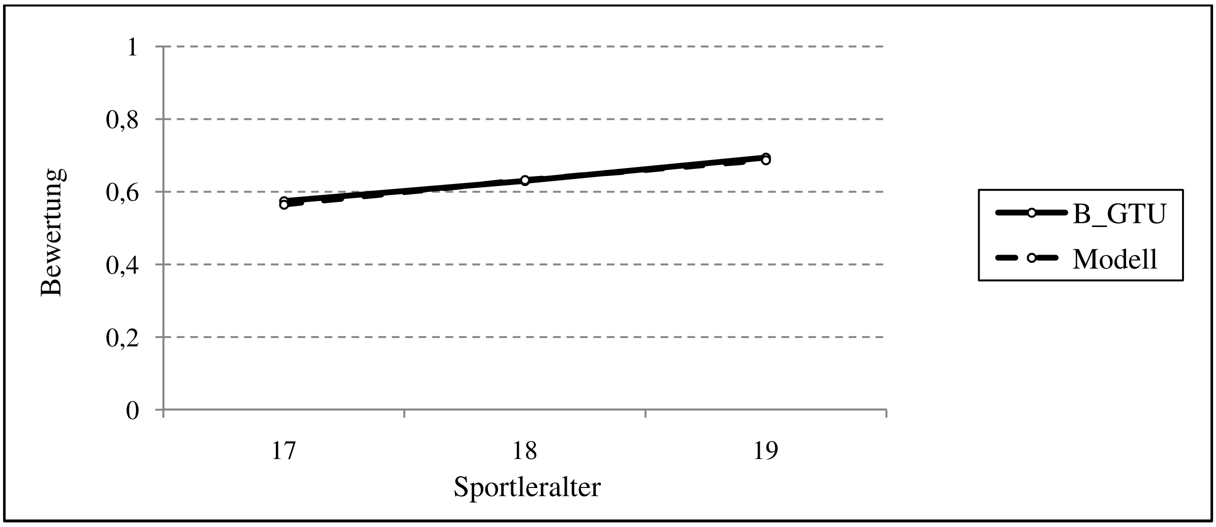

Abb. 4-11: *Vergleich der Bewertungen des GTU und des Modells (5 TK)*

Abbildung 4-11 bestätigt, dass sich die Bewertung des GTU aus den Bewertungen der 5 Trainingskomponenten beschreiben lässt. Die mittlere quadratische Abweichung zwischen den Bewertungen des GTU und den aus den 5 Trainingskomponenten modellierten Bewertungen beträgt lediglich 0,00016.

Somit kann der Zusammenhang zwischen den Belastungen der Trainingskomponenten und der Wettkampfleistung modelliert werden.

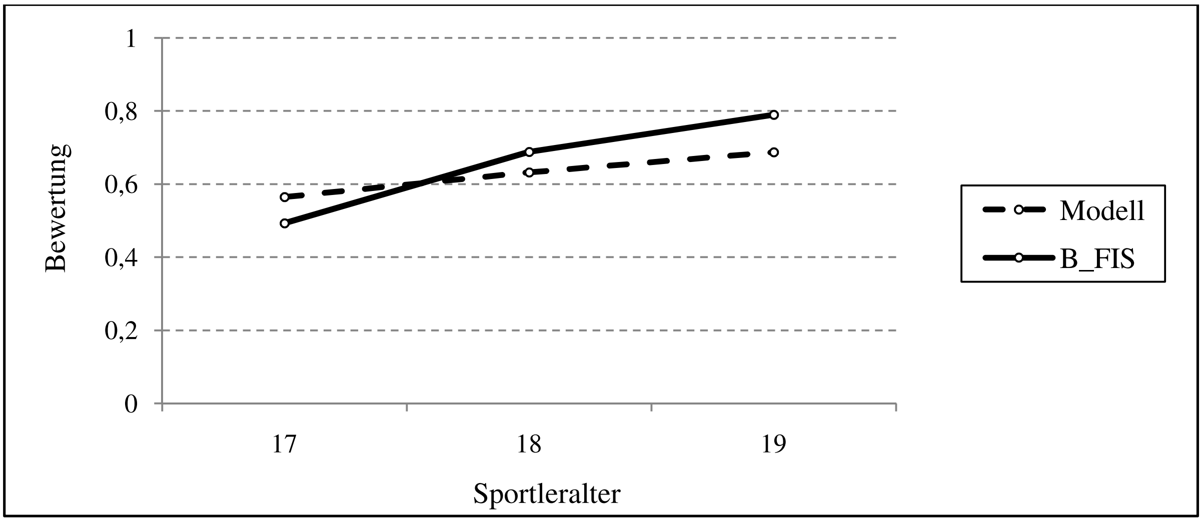

Abb. 4-12: *Vergleich der Bewertungen der Wettkampfleistung und des Modells (aus 5 TK)*

Die vorgestellte Methodik ist von der Anzahl der Trainingskomponenten und Ebenen in der Baumstruktur unabhängig, solange diese monohierarchisch ist. Demnach lässt sich die Modellgleichung verallgemeinert schreiben:

Wenn man annimmt, dass n Trainingskomponenten $TK_i, i = 1, \dots n$ mit einem Stundenumfang von jeweils h_i berücksichtigt werden, so hat die folgende Aussage Gültigkeit:

WENN der zeitliche Umfang h_1 der Trainingskomponente TK_1 wirksam ist
UND
...
UND
WENN der zeitliche Umfang h_n der Trainingskomponente TK_n wirksam ist
DANN ist der zeitliche Umfang $h_{GTU} = h_1 + \cdots + h_n$ des Gesamttrainings GTU wirksam

Die daraus resultierende Modellgleichung lautet

$$B_{GTU}{}^{(j)}(\sum_i h_i{}^{(j)}) = \sum_i a_i \cdot B_i{}^{(j)}(h_i{}^{(j)})$$

Der kausale Zusammenhang zwischen der sportlichen Leistung und der Zusammensetzung des Trainings (für jedes Jahr j) kann modelliert und damit quantitativ beschrieben werden:

$$\boxed{B_W{}^{(j)}(P^{(j)}) = B_{GTU}{}^{(j)}(\sum_i h_i{}^{(j)}) = \sum_i a_i \cdot B_i{}^{(j)}(h_i{}^{(j)})}$$

Im Nachfolgenden wird diese Gleichung als *Modellgleichung der Trainingswirkungsanalyse* bezeichnet.

In Bezug auf das vorangegangene Beispiel wird deutlich, dass im Allgemeinen keine vollständige Übereinstimmung zwischen der vorgegebenen Bewertung der Wettkampfleistung und der Bewertung der Trainingsbelastung bei subjektiv festgelegten Bewertungsfunktionen erzielt wird.
Somit wird das Ergebnis der Modellierung lediglich die Minimierung der Abweichung zwischen der Bewertung der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung darstellen. Da die Modellgleichung jedoch maßgeblich durch die Festlegung der Bewertungsfunktionen beschrieben wird, stellt sich die Frage, ob eine Übereinstimmung zwischen der Leistungs- und Trainingsbewertung realisiert werden kann, wenn die Zugehörigkeitsfunktionen geeignet festgelegt werden.

5 Modelluntersuchungen

Im nachfolgenden Abschnitt soll anhand einfacher Modellansätze gezeigt werden, welche Wirkung bestimmte Festlegungen an die Bewertungsfunktionen zur Folge hat. Für die Modelluntersuchungen gelten anschließende Bezeichnungen:

n	...	Anzahl der Trainingskomponenten
h_i	...	absolvierte Trainingsstunden der Komponente $TK_i, i = 1, \dots, n$
h_{GTU}	...	absolvierte Trainingsstunden des Gesamttrainings mit $h_{GTU} = \sum_i h_i$
j_0	...	Referenzjahr Unter Referenzjahr ist das in Bezug auf die Modellanalyse jüngste berücksichtigte Sportleralter zu verstehen.
j	...	betrachtetes Sportleralter
${S_{GTU}}^{(j_0)}$ bzw. ${S_{GTU}}^{(j)}$	...	Richtwert (laut RTP) für den Stundenumfang des Gesamttrainings für das Referenzjahr bzw. für das betrachtete Sportleralter
${S_i}^{(j_0)}$ bzw. ${S_i}^{(j)}$	...	Richtwert (laut RTP) für den Stundenumfang der Trainingskomponente TK_i für das Referenzjahr bzw. das betrachtete Sportleralter

Die Modelluntersuchungen werden auf der Grundlage von Trainingswerten diskutiert, die unterhalb der Toleranz (Richtwerte des Rahmentrainingsplans), aber innerhalb der Supportgrenze der Dreiecksfunktion liegen. Die Bewertung der Trainingsstunden erfolgt somit ausschließlich anhand der linken Flanke der Dreiecksfunktion. Das heißt, es werden nur Fälle betrachtet, bei denen eine Leistungssteigerung durch Erhöhung des Trainingsumfanges realisiert werden kann. In den nachfolgenden Abbildungen wird lediglich zur Illustration der Dreiecksfunktion die rechte Flanke dargestellt; diese bleibt jedoch unberücksichtigt.

Die Grenzen der Dreiecksfunktion werden als Abweichung von $\pm p \cdot 100\%$ vom Richtwert festgelegt $p \in (0,1)$ und somit durch $S \cdot p$ bzw. $S \cdot (2 - p)$ berechnet.
Für die Bewertung des Stundenumfangs des Gesamttrainings bzw. der Trainingskomponenten TK_i wird dieser Parameter im Weiteren als p_{GTU} bzw. p_i bezeichnet.

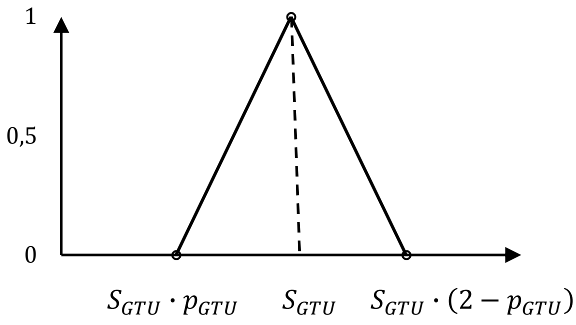

Abb. 5-1: *Dreiecksfunktion zur Bewertung des GTU*

Aus Übersichtlichkeitsgründen nachfolgender Berechnungen wird die in Abschnitt 4.2.2 festgelegte Symbolik $B_i^{(j)}(h_i^{(j)})$ durch $B^{(j)}(h_i)$ vereinfacht.

Da die altersgemäße Bewertung der Trainingskomponenten allein aus der Parallelverschiebung der Dreiecksfunktionen um $v_i^{(j)}$ hervorgeht und sich der Anstieg der Zugehörigkeitsfunktionen für jedes Sportlerjahr nicht ändert, kann jede Bewertung auf der Grundlage der Bewertungsfunktion des Referenzjahres realisiert werden.

$$B^{(j)}(h_i) = B^{(j_0)}\left(h_i - v_i^{(j)}\right) \quad \text{mit } v_i^{(j)} = S_i^{(j)} - S_i^{(j_0)}$$

Infolgedessen wird auf die Altersindizierung der Bewertungsfunktionen verzichtet und diese im Nachfolgenden durch

$$B(h_i) = B^{(j_0)}\left(h_i - v_i^{(j)}\right)$$

dargestellt.

Die nachfolgenden Untersuchungen wurden auf der Grundlage der 5 Trainingskomponenten des vorangegangenen Abschnitts beschrieben: spezielles Ausdauer- und Krafttraining sowie allgemeines Ausdauer-, Kraft- und Ergänzungstraining. Demnach gilt im Weiteren $n = 5$.

5.1 Basismodell

Die Wirkungsweise der Modellparameter soll auf der Grundlage einer einfachen Modellkonstellation, dem Basismodell, aufgezeigt werden.
Unter der Bezeichnung Basismodell ist zu verstehen, dass der additive Zusammenhang der Richtwerte des RTP sowie der Trainingswerte selbst (aufgrund des sportwissenschaftlichen Trainingsaufbaus) in gleicher Weise für die Supportgrenzen der Dreiecksfunktionen bestehe.

Durch die Anpassung der unteren Supportgrenze u des Gesamttrainings wird p_{GTU} festgelegt durch

$$p_{GTU} = \frac{u}{S_{GTU}}$$

Die Festlegung der Parameter $p_i,\ i = 1, \dots 5$ erfolgt im einfachen Fall für jede Trainingskomponente gleich durch

$$p_i = p_{GTU}$$

Unter den getroffenen Voraussetzungen und Gültigkeit der Modellgleichung

$$B\left(\sum_i h_i\right) = \sum_i a_i \cdot B(h_i) \tag{1}$$

soll im Nachfolgenden gezeigt werden, dass die Koeffizienten a_i eindeutig bestimmt sind.

Eine Bewertung der Trainingsstundenveränderung um Δh_i lässt sich in Analogie zu (1) darstellen als

$$B\left(\sum_i h_i + \Delta h_i\right) = \sum_i a_i \cdot B(h_i + \Delta h_i) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich im speziellen Fall bei Festsetzung von $\Delta h_1, \dots, \Delta h_4 = 0,\ \Delta h_5 > 0$

$$B\left(\sum_i h_i + \Delta h_5\right) - B\left(\sum_i h_i\right) = a_5\left(B(h_5 + \Delta h_5) - B(h_5)\right) \tag{3}$$

Aus (3) folgt für a_5

$$a_5 = \frac{B\left(\sum_i h_i + \Delta h_5\right) - B\left(\sum_i h_i\right)}{B(h_5 + \Delta h_5) - B(h_5)} \tag{4}$$

Aus der Definition der Dreiecksfunktionen lassen sich die Bewertungen wie folgt explizit angeben:

$$B(\sum_i h_i + \Delta h_5) = \frac{\sum_i h_i + \Delta h_5 - S_{GTU} \cdot p_{GTU}}{S_{GTU}(1 - p_{GTU})} \quad \text{und} \quad B(\sum_i h_i) = \frac{\sum_i h_i - S_{GTU} \cdot p_{GTU}}{S_{GTU}(1 - p_{GTU})}$$

$$B(h_5 + \Delta h_5) = \frac{h_5 + \Delta h_5 - S_5 \cdot p_{GTU}}{S_i(1 - p_{GTU})} \quad \text{und} \quad B(h_5) = \frac{h_5 - S_5 \cdot p_{GTU}}{S_i(1 - p_{GTU})} \tag{5}$$

Durch Einsetzen in (4) ergibt sich

$$a_5 = \frac{S_5(1 - p_{GTU})}{S_{GTU}(1 - p_{GTU})} = \frac{S_5}{S_{GTU}} \tag{6}$$

Alle weiteren Koeffizienten lassen sich in gleicher Weise berechnen, sodass in diesem speziellen Fall allgemein geschrieben werden kann

$$a_i = \frac{S_i}{S_{GTU}} \tag{7}$$

Die Koeffizienten können somit unabhängig von den realisierten Trainingsstunden des Sportlers aus den Richtwerten des Rahmentrainingsplans errechnet werden. Sie geben die prozentuale Stundenaufteilung des Rahmentrainingsplans an.

Für eine Veränderung um 1 Stunde bedeutet dies:

Während sich die Bewertung der Trainingskomponente um $\frac{1}{S_i(1 - p_{GTU})}$ ändert, beträgt die Änderung in der Bewertung des Gesamttrainings $\frac{1}{S_{GTU}(1 - p_{GTU})}$, sodass sich ein Bewertungsquotient von $\frac{S_i}{S_{GTU}}$ für die Komponente TK_i ergibt.

Die aus den theoretischen Ableitungen bestimmten Parameter a_i werden durch das Optimierungsverfahren von KARUSH/KUHN/TUCKER bestätigt.

Entsprechend folgt aus (1) und (2) im allgemeinen Fall für $\Delta h_1, \ldots, \Delta h_5 \neq 0$

$$B(\sum_i h_i + \Delta h_i) - B(\sum_i h_i) = \sum_i a_i \left[B(h_i + \Delta h_i) - B(h_i)\right] \tag{8}$$

Durch Umschreiben der Bewertungen gemäß (5) erhält man

$$\frac{\sum_i \Delta h_i}{S_{GTU}(1-p_{GTU})} = \sum_i \Delta h_i \frac{a_i}{S_i(1-p_{GTU})} \tag{9}$$

$\frac{a_i}{S_i(1-p_{GTU})}$ ergibt durch Einsetzen von (7) für jede Trainingskomponente den konstanten Faktor $\frac{1}{S_{GTU}\,(1-p_{GTU})}$

Somit bewirkt die Veränderung um eine Trainingsstunde in einer beliebigen Trainingskomponente die gleiche Bewertungsänderung im GTU.

Eine Bewertungssteigerung kann somit unabhängig von den Trainingskomponenten durch eine Stundenerhöhung der Trainingswerte erfolgen, solange diese unterhalb der Richtwerte des RTP liegen. Das Basismodell liefert demnach keine Aussagen über die Qualität der Trainingskomponenten, sondern über den Erfüllungsgrad des RTP.

Beispiel 5-1:
Gegeben sei eine Stundenverteilung des RTP, angegeben für das Referenzjahr 17.
Für p_{GTU} gilt der Wert 0,5; d.h. das Training wird als unwirksam bezeichnet bzw. erfüllt den RTP nicht, wenn der Sportler weniger als die Hälfte der Richtwerte des RTP leistet.
Dann ergeben sich für jede Trainingskomponente die Koeffizienten a_i. Diese wurden in nachfolgender Tabelle angegeben.

Tab. 5-1: *Zahlenbeispiel für die Berechnung der Koeffizienten im Sinne des Basismodells*

		GTU	*spez. Ausd.*	*spez. Kraft*	*allg. Ausd.*	*allg. Kraft*	*allg. E.*
RTP		620	335	15	60	70	140
a_i			0,5403	0,0242	0,0968	0,1129	0,2258

Die Veränderung um eine Trainingsstunde bewirkt für jede Komponente die gleiche Veränderung im GTU. Diese beträgt 0,00323.
Unter den gegebenen Modellvoraussetzungen des Basismodells ergeben sich die Bewertungen der tatsächlich realisierten Gesamttrainingsumfänge eines Sportlers für 3 Jahre gemäß nachfolgender Tabelle.

Tab. 5-2: *Bewertung der GTU auf der Grundlage des Basismodells*

Alter		*GTU*	*untere Grenze*	*RTP*	*Bewertung GTU*
17		496	310	620	0,600
18		553	350	660	0,655
19		645	420	730	0,726

Sollten die Bewertungen des GTU mit den Bewertungen der FIS-Punkte der betrachteten Jahre übereinstimmen, so lässt sich die Leistungsentwicklung allein anhand des Erfüllungsgrades des RTP modellieren. Eine Erhöhung der Leistungsbewertung ließe sich dann allein durch eine Erhöhung der Stundenumfänge, unabhängig in welcher Trainingskomponente (solange diese unter den Richtwerten des RTP liegen) erzielen.

Im Allgemeinen wird sich die Leistungsentwicklung der Sportler aufgrund individueller Einflüsse nicht anhand des Erfüllungsgrades des RTP modellieren lassen. Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht die Situation.

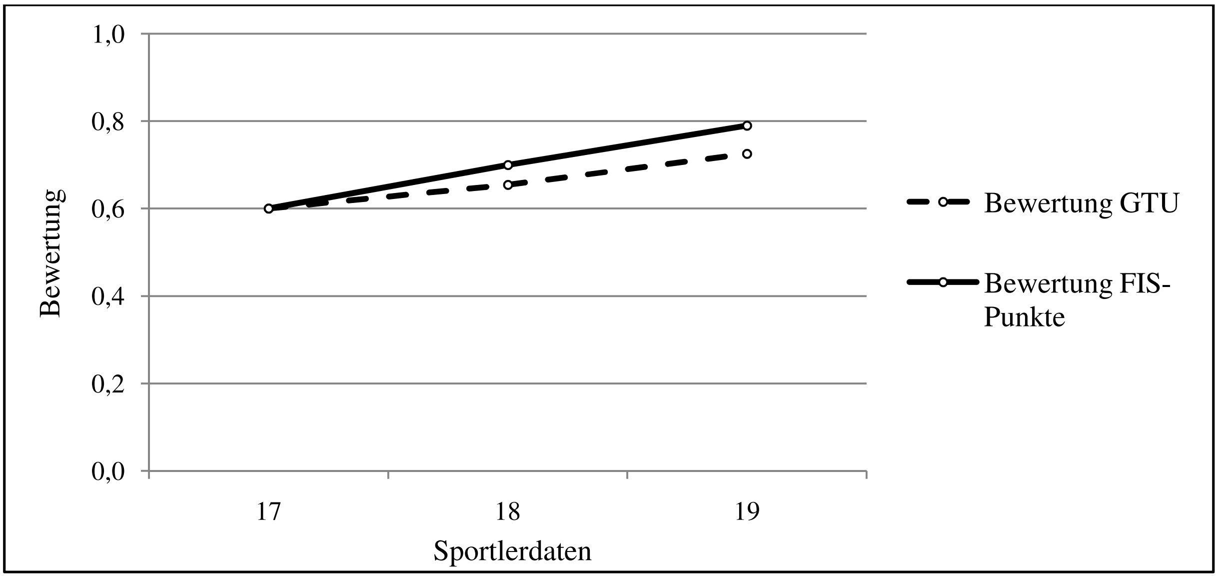

Abb. 5-2: *keine Übereinstimmung zwischen Bewertung der Wettkampfleistung und Trainingsbelastung (Basismodell)*

Die Abbildung zeigt, dass die Leistungsbewertung nicht durch die Bewertung des GTU, modelliert auf der Grundlage des Basismodells, beschrieben werden kann. Um eine Übereinstimmung zu erzielen, muss das Basismodell erweitert werden.

5.2 Modifikation der Dreiecksfunktionen unter Beibehaltung des additiven Zusammenhangs des Basismodells

Die einfachste Modifikation besteht in der Veränderung des Supportes der Dreiecksfunktion einer oder mehrerer Trainingskomponenten unter Beibehaltung der Additivität des Basismodells, das heißt

$p_i \neq p_{GTU}$ $\quad i = 1,\ldots,5 \quad$ mit $\quad \sum_i S_i \cdot p_i = S_{GTU} \cdot p_{GTU}$

Für die Berechnung der Koeffizienten der Trainingskomponenten gelten die theoretischen Ableitungen des Basismodells.

$$a'_i = \frac{S_i(1-p_i)}{S_{GTU}(1-p_{GTU})} \tag{10}$$

Die Veränderung des Supportes der Dreiecksfunktionen der Trainingskomponenten hat unter Berücksichtigung des additiven Zusammenhangs des Basismodells zur Konsequenz, dass sich die dazugehörigen Koeffizienten ebenfalls verändern. Die veränderten Koeffizienten wurden mit ' markiert.

Im allgemeinen Fall kann somit gemäß (9) geschrieben werden

$$\frac{\sum_i \Delta h_i}{S_{GTU}(1-p_{GTU})} = \sum_i \Delta h_i \frac{a'_i}{S_i(1-p_i)} \tag{11}$$

In Analogie zum Basismodell ergibt sich durch Einsetzen der Koeffizienten a'_i in $\frac{a'_i}{S_i(1-p_i)}$ der konstante und zum Basismodell unveränderte Faktor $\frac{1}{S_{GTU}(1-p_{GTU})}$.

Das heißt, die Veränderung um eine Trainingsstunde in jeder beliebigen Komponente führt zur gleichen Bewertungsänderung im GTU, die der Bewertungsänderung des Basismodells entspricht.

Damit konnte gezeigt werden, dass eine Modifikation der Supportgrenzen der Dreiecksfunktionen der Trainingskomponenten zwar augenscheinlich zu einer Veränderung der Koeffizienten a_i führt, dies jedoch keine Auswirkungen auf die Bewertungsänderung im GTU hat.

Die Veränderung des Supportes der Dreiecksfunktionen der Trainingskomponenten genügt im Allgemeinen nicht, um eine Übereinstimmung zwischen der Bewertung der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung zu erzielen, sodass das Basismodell weiter modifiziert werden muss.

5.3 Modifikation der Dreiecksfunktionen unter Vernachlässigung des additiven Zusammenhangs des Basismodells

Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt, wird sich die Leistungsentwicklung des Sportlers im Allgemeinen nicht auf der Grundlage des Basismodell modellieren lassen, da die auf der Grundlage des Basismodells entstandene Gesamttrainingsbewertung im Allgemeinen nicht mit der Bewertung der Wettkampfleistung in allen betrachteten Jahren übereinstimmt.

Die Abweichung wird durch eine zusätzliche Komponente Z beschrieben, sodass sich die Modellgleichungen (1) und (2) in abgeänderter Form schreiben lassen

$$\begin{aligned} B(P^{17}) &= B\left({h_{GTU}}^{17}\right) + Z^{17} \\ &= B\left(\textstyle\sum_{i=1}^{5} h_i\right) + Z^{17} = \textstyle\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot B(h_i) + Z^{17} \\ B(P^{18}) &= B\left({h_{GTU}}^{18}\right) + Z^{18} \\ &= B\left(\textstyle\sum_{i=1}^{5} h_i + \Delta^{18} h_i\right) + Z^{18} = \textstyle\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18} h_i) + Z^{18} \end{aligned} \tag{12}$$

Die Abweichung soll durch die Anpassung einer oder mehrerer Trainingskomponenten realisiert werden. Die korrigierten Parameter werden im Folgenden mit * markiert, sodass beispielhaft für die Trainingskomponente TK_5 geschrieben werden kann.

$$\begin{aligned} B(P^{17}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{4} a_i \cdot B(h_i) + {a_5}^* \cdot B^*(h_5) \\ B(P^{18}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{4} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18} h_i) + {a_5}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5) \end{aligned} \tag{13}$$

Aus (13) folgt durch Umformung

$$\begin{aligned} B(P^{17}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot B(h_i) - a_5 \cdot B(h_5) + {a_5}^* \cdot B^*(h_5) \\ B(P^{18}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18} h_i) - a_5 \cdot B(h_5 + \Delta^{18} h_5) + {a_5}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5) \end{aligned} \tag{14}$$

Die Leistungsbewertung kann demnach durch das Basismodell, erweitert durch einen qualitativen Anteil der Trainingskomponente TK_5 , dargestellt werden.
Daraus folgt für Z^{17} und Z^{18}

$$Z^{17} \ = a_5{}^* \cdot B^*(h_5) - a_5 \cdot B(h_5) \tag{15}$$
$$Z^{18} \ = a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5) - a_5 \cdot B(h_5 + \Delta^{18} h_5)$$

Durch die Anpassung der unteren Supportgrenze kann erreicht werden, dass die Bewertung der Wettkampfleistung und des Gesamttrainings für das Sportleralter 17 übereinstimmen. Damit folgt

$$Z^{17} = 0$$

Die Altersindizierung wird aus Vereinfachungsgründen für das nachfolgende Sportleralter vernachlässigt, sodass sich die Gleichungen aus (12) schreiben lassen als

$$\begin{aligned} B(P^{17}) &= B(\textstyle\sum_{i=1}^{5} h_i) = \sum_{i=1}^{5} a_i \, B(h_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{4} a_i \cdot B(h_i) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5) \\ \\ B(P^{18}) &= B(\textstyle\sum_{i=1}^{5} h_i + \Delta h_i) \ + Z = \sum_{i=1}^{5} a_i \, B(h_i + \Delta h_i) + Z \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{4} a_i \cdot B(h_i + \Delta h_i) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta h_5) \end{aligned} \tag{16}$$

mit $Z = a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta h_5) - a_5 \cdot B(h_5 + \Delta h_5)$

Aus (16) ergibt sich für $\Delta h_1, \dots, \Delta h_4 = 0, \ \Delta h_5 > 0$

$$a_5{}^*[B^*(h_5 + \Delta h_5) - B^*(h_5)] = a_5[B(h_5 + \Delta h_5) - B(h_5)] + Z \tag{17}$$

Dividiert man die Gleichung (17) durch Δh_5 ,

$$a_5{}^* \cdot \left[\frac{B^*(h_5 + \Delta h_5) - B^*(h_5)}{\Delta h_5} \right] = \ a_5 \cdot \ \left[\frac{B(h_5 + \Delta h_5) - B(h_5)}{\Delta h_5} \right] + \frac{Z}{\Delta h_5} \tag{18}$$

so wird durch den Quotienten

$$\mathrm{A} = \frac{B(h_5 + \Delta h_5) - B(h_5)}{\Delta h_5}$$

der Anstieg A der Zugehörigkeitsfunktion B zur Bewertung der Trainingsstunden der Komponente TK_5 beschrieben.

Unter der Annahme, die charakteristische Funktion ${B^*}_5$ sei ebenfalls eine Dreiecksfunktion, wird der Quotient

$$A^* = \frac{B^*(h_5+\Delta h_5)-B^*(h_5)}{\Delta h_5}$$

in Analogie zu A als Anstieg von B^* betrachtet.
Es wird festgelegt, dass beide Anstiege übereinstimmen $A = A^*$. Somit lässt sich (18) schreiben als

$$\begin{aligned} {a_5}^* \cdot A &= a_5 \cdot A + \frac{Z}{\Delta h_5} \\ {a_5}^* &= a_5 + \frac{Z}{\Delta h_5 \cdot A} \end{aligned} \tag{19}$$

Auf der Grundlage der Modellgleichungen (15) können die angepassten Bewertungen der Trainingskomponente TK_5 für die Sportleralter 17 bis 18 berechnet werden

$$\begin{aligned} B^*(h_5) &= \frac{a_5 \cdot B(h_5)}{{a_5}^*} \\ B^*(h_5 + \Delta h_5) &= \frac{a_5 \cdot B(h_5 + \Delta h_5) + Z}{{a_5}^*} \end{aligned} \tag{20}$$

Die angepassten Koeffizienten ${a_5}^*$ werden durch das Optimierungsverfahren von KKT bestätigt.

Unter der Voraussetzung, die Zuwächse Z seinen positiv, gilt für den Parameter ${a_5}^*$ der Zusammenhang

$${a_5}^* \geq a_5$$

Die Veränderung um eine Trainingsstunde in der Komponente TK_5 bedeutete im Basismodell eine Bewertungsänderung im GTU um $\frac{a_5}{S_5(1-p_{GTU})}$. In Folge der Anpassung des Koeffizienten ergibt sich nun ein Wert von $\frac{{a_5}^*}{S_5(1-p_{GTU})}$.

Aus ${a_5}^* \geq a_5$ folgt die Beziehung $\frac{{a_5}^*}{S_5(1-p_{GTU})} \geq \frac{a_5}{S_5(1-p_{GTU})}$.

Anders als im Basismodell dargestellt, führt eine Erhöhung/Verringerung um eine Trainingsstunde nicht in jeder Trainingskomponente zur gleichen Bewertungsänderung im Gesamttraining. Sie weist in der Komponente 5 einen größeren Wert auf.

Weiterhin folgt für die angepassten Bewertungen der Trainingskomponente TK_5 gemäß (15)

$$B^*(h_5) \leq B(h_5)$$

$$B^*(h_5 + \Delta h_5) \leq B(h_5 + \Delta h_5)$$

Da die Anstiege A und A^* übereinstimmen, geht die angepasste Bewertungsfunktion B^* durch Parallelverschiebung von B hervor. Abbildung 5-3 verdeutlicht die Verschiebung anhand der Trainingskomponente TK_5.

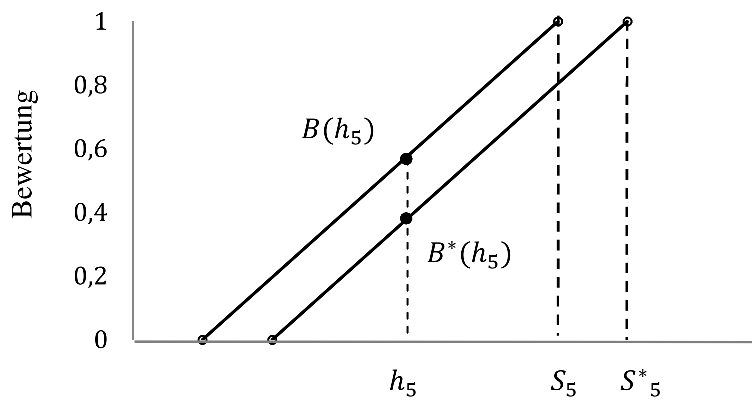

Abb. 5-3: *Verschiebung der Bewertungsfunktion der Komponente* TK_5

Die erreichte Leistung wird mit einem Aufwand von h_5 Trainingsstunden in der Komponente TK_5 erbracht. Betrachtet man das Verhältnis zwischen den realisierten Trainingsstunden und den Soll-Stunden des RTP S_5, so entsprechen die getätigten Trainingsstunden h_5 bei der angepassten Modellierung einem geringeren Anteil gegenüber den Optimalstunden des RTP S^*_5 ($S^*_5 \geq S_5$). Das heißt, dass die erreichte Leistung mit relativ weniger Trainingsstunden in der angepassten Modellierung erbracht wurde, sodass die Trainingsstunden als „intensiver ausgeführt“ zu interpretieren sind.

Da die Anpassung zwischen der Bewertung der Wettkampfleistung und des Gesamttrainingsumfangs auf der Grundlage des 17. und 18. Sportlerjahres beschrieben wurde, ist aus der Gültigkeit der Modellgleichung

$$B(P) = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot B(h_i) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5)$$

der modellierte Wert $B(P)$ des 19. Jahres durch Kenntnis der angepassten Bewertung B^* für das Sportlerjahr 19 bereits definiert.

Die angepasste Bewertung für das 19. Sportleralter berechnet sich durch

$$B^*(h_5 + \Delta^{19} h_5) = B(h_5 + \Delta^{19} h_5) - [B(h_5) - B^*(h_5)]$$

Daraus ergibt sich Z^{19}

$$Z^{19} = a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{19} h_5) - a_5 \cdot B(h_5 + \Delta^{19} h_5)$$

Im Allgemeinen wird durch den errechneten Zuwachs des 19. Jahres keine Übereinstimmung der Bewertung des GTU und der Leistung für das 19. Sportlerjahr erzielt werden. Abbildung 5-4 verdeutlicht die Situation.

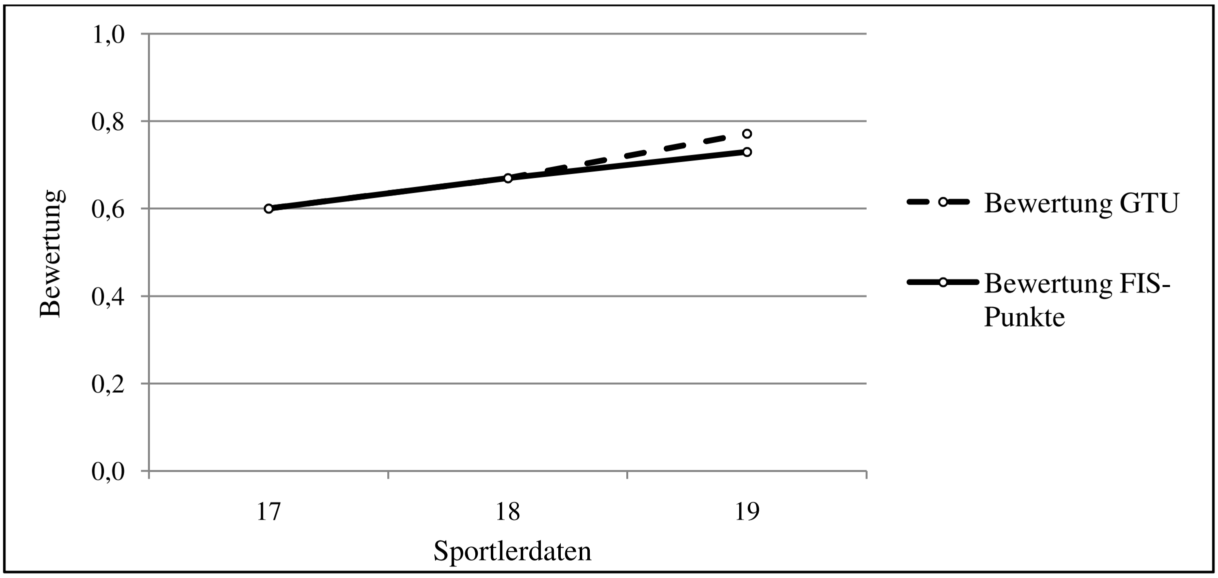

Abb. 5-4: *Übereinstimmung der Bewertung des GTU und der Wettkampfleistung in 2 Jahren*

Damit die Übereinstimmung im 19. Jahr und somit für alle 3 betrachteten Jahre realisiert werden kann, wird die tatsächliche Abweichung des 19. Jahres durch eine zusätzliche Komponente Z^{19} beschrieben. Die Modellgleichungen lassen analog zu der vorangegangenen Berechnung darstellen.

$$B(P^{17}) = B(\sum_{i=1}^{5} h_i) = \sum_{i=1}^{5} a_i\, B(h_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5)$$

$$B(P^{18}) = B(\sum_{i=1}^{5} h_i + \Delta^{18} h_i) + Z^{18} = \sum_{i=1}^{5} a_i\, B(h_i + \Delta^{18} h_i) + Z^{18} \tag{21}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18} h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{18} h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5)$$

$$B(P^{19}) = B(\sum_{i=1}^{5} h_i + \Delta^{19} h_i) + Z^{19} = \sum_{i=1}^{5} a_i\, B(h_i + \Delta^{19} h_i) + Z^{19}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{19} h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{19} h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{19} h_5)$$

Betrachtet wird der spezielle Fall

$\Delta^{18} h_1, \dots, \Delta^{18} h_3 = 0,\ \Delta^{18} h_4 > 0,\ \Delta^{18} h_5 > 0$ sowie
$\Delta^{19} h_1, \dots, \Delta^{19} h_3 = 0,\ \Delta^{19} h_4 > 0,\ \Delta^{19} h_5 > 0$

Unter der Modellannahme, dass die Anstiege der Bewertungsfunktionen B und B^* der Trainingskomponenten TK_4 sowie TK_5 übereinstimmen, können die Koeffizienten $a_4{}^*$, $a_5{}^*$ und die angepassten Bewertungen der beiden Komponenten berechnet werden.
Es sollen an dieser Stelle nur die berechneten Größen angeben werden, die Berechnungen dazu sind im Anhang ersichtlich.

$$a_4{}^* = a_4 + \frac{Z^{18} \cdot \Delta^{19} h_5 - Z^{19} \cdot \Delta^{18} h_5}{A_4 \cdot (\Delta^{18} h_4 \cdot \Delta^{19} h_5 - \Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4)}$$
$$(22)$$
$$a_5{}^* = a_5 + \frac{Z^{18} \cdot \Delta^{19} h_4 - Z^{19} \cdot \Delta^{18} h_4}{A_5 \cdot (\Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4 - \Delta^{18} h_4 \cdot \Delta^{19} h_5)}$$

mit $\Delta^{18} h_4 \cdot \Delta^{19} h_5 \neq \Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4$ und $A_4,\ A_5 \neq 0$

Für eine vorgegebene Verschiebung V_5 der Bewertungsfunktion B für die Trainingskomponente TK_5

$$B^*(h_5) = B(h_5) + V_5$$
$$B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5) = B(h_5 + \Delta^{18} h_5) + V_5 \tag{23}$$
$$B^*(h_5 + \Delta^{19} h_5) = B(h_5 + \Delta^{19} h_5) + V_5$$

können die angepassten Bewertungen B^* der Trainingskomponente TK_4 explizit angegeben werden.

$$B^*(h_4) = \frac{B(L^{17}) - \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i) - a_5{}^* \cdot [B(h_5) + V_5]}{a_4{}^*}$$

$$B^*(h_4 + \Delta^{18}h_4) = \frac{B(L^{18}) - \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18}h_i) - a_5{}^* \cdot [B(h_5 + \Delta^{18}h_i) + V_5]}{a_4{}^*} \tag{24}$$

$$B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) = \frac{B(L^{19}) - \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{19}h_i) - a_5{}^* \cdot [B(h_5 + \Delta^{19}h_i) + V_5]}{a_4{}^*}$$

mit $a_4{}^* \neq 0$

In Analogie können die angepassten Bewertungen für die Trainingskomponente TK_5 bei Vorgabe der Verschiebung V_4 berechnet werden.

Die in der theoretischen Ableitung ermittelten angepassten Koeffizienten wurden durch das Optimierungsverfahren von Karush-Kuhn-Tucker bestätigt.
Die hierarchische Verteilung der Zusatzkomponenten Z hängt dabei von subjektiven oder trainingswissenschaftlichen Erfahrungen der Trainingspraxis ab.

Durch eine Anpassung der Bewertungsfunktionen der betrachteten Trainingskomponenten gelingt es, eine Übereinstimmung zwischen der Bewertung der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung für alle berücksichtigten Sportlerjahre zu erzielen.
Im Vergleich zum Basismodell bewirkt die Veränderung um eine Trainingsstunde auf Grund der angepassten Koeffizienten $a_4{}^*$ und $a_5{}^*$ nicht mehr in jeder Trainingskomponente die gleiche Bewertungsänderung im GTU.
Für eine Veränderung um eine Stunde der Trainingskomponente TK_4 bzw. TK_5 wird durch den Quotienten

$$\frac{a^*{}_4}{S_4(1 - p_{GTU})} \text{ bzw. } \frac{a^*{}_5}{S_5(1 - p_{GTU})}$$

die Bewertungsänderung im GTU beschrieben.
Da die Bewertungen und Koeffizienten der übrigen Trainingskomponenten $TK_i, i = 1,..3$ bei der Anpassung der Trainingskomponenten TK_4 und TK_5 unberücksichtigt blieben, entsprechen diese den Werten des Basismodells. Somit bewirkt die Veränderung einer Trainingsstunde in diesen Komponenten die gleiche Änderung in der Bewertung des GTU, die wie in Abschnitt 5.1 gezeigt, durch

$$\frac{a_i}{S_i(1-p_{GTU})} = \frac{1}{S_{GTU}\,(1-p_{GTU})} \quad , \ i \ = \ 1,\dots,3$$

berechnet werden kann.

Beispiel 5-2

Gegeben seien die Trainingsdaten eines Sportlers, die Vorgaben des RTPs sowie die Bewertung der Distanz-FIS-Punkte über 3 Jahre.

Tab. 5-3: *realisierte Trainingsstunden und dazugehörigen Richtwerte eines Betrachtungszeitraumes von 3 Jahren*

		GTU	***spez. Ausd.***	***allg. E.***	***allg. Kraft***	***allg. Ausd.***	***spez. Kraft***
Alter							
17	Trainings -stunden	496	319	92	45	31	9
18		553	345	95	56	42	15
19		645	400	110	65	50	20
17	RTP (Stunden)	620	335	140	70	60	15
18		660	360	140	70	70	20
19		730	407	150	75	75	23

Tab. 5-4: *bewertete Distanz-FIS-Punkte eines Sportlers über 3 Jahre*

Alter	***B_FIS***
17	0,600
18	0,670
19	0,730

Um eine Übereinstimmung der Wettkampfbewertung und der Bewertung der Trainingsbelastung (GTU) im 17. Jahr zu erzielen, gilt p = 0,5. Die Werte der unteren Supportgrenzen entsprechen der Hälfte der Richtwerte des Rahmentrainingsplans. Die auf der Grundlage des Basismodells realisierten Bewertungen der Trainingsstunden und die berechneten Koeffizienten wurden in der nachfolgenden Tabelle angegeben.

Tab. 5-5: *Bewertung der Trainingsstunden und Berechnung der Koeffizienten auf der Grundlage des Basismodells*

		GTU	***spez. Ausd.***	***allg. E.***	***allg. Kraft***	***allg. Ausd.***	***spez. Kraft***
Alter							
17	Bewertung Trainings-stunden	0,600	0,904	0,314	0,286	0,033	0,200
18		0,655	0,910	0,357	0,600	0,067	0,333
19		0,726	0,958	0,429	0,714	0,167	0,600
	a_i		0,5403	0,2258	0,1129	0,0968	0,0242

Um eine Übereinstimmung in den beiden anderen Jahren zu erzielen, müssen die Bewertungen und Koeffizienten zweier Trainingskomponenten angepasst werden. Für die Beispielrechnung wurden die Werte des allgemeinen Ausdauer- und speziellen Krafttrainings angepasst und mit oben stehender Formel berechnet.

Bei Vorgabe einer Verschiebung der Bewertungsfunktion des speziellen Krafttrainings um 0,2 ergeben sich die Bewertungen der 3 Sportlerjahre für das allgemeine Ausdauertraining.

Tab. 5-6: *angepasste Bewertungen und Koeffizienten*

		allg. Ausd.	***spez. Kraft***
Alter			
17	angepasste Bewertung	0,150	0,400
18		0,183	0,533
19		0,283	0,800
	$a^*{}_i$	-1,142	0,448

Die Modellgleichung der Trainingswirkungsanalyse

$$B(P) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5)$$

ist somit durch die Anpassung für alle berücksichtigten 3 Sportlerjahre erfüllt.

Die Veränderung um eine Trainingsstunde in den Trainingskomponenten bewirkt nachfolgend aufgelistete Veränderung in der Bewertung des GTU.

Tab. 5-7: *Bewertungsänderung im GTU bei Veränderung einer Trainingsstunde in den Trainingskomponenten*

	spez. Ausd.	***allg. E.***	***allg. Kraft***	***allg. Ausd.***	***spez. Kraft***
Bewertungs-änderung GTU	0,00323	0,00323	0,00323	-0,03806	0,05967

Auf der Grundlage der angegebenen Bewertungsänderungen im GTU bei Veränderung einer Trainingsstunde in den Komponenten können in Form von Szenarienrechnungen fiktive Stundenumverteilungen diskutiert werden.

6 Anwendungsmöglichkeiten der Modellgleichung

Wie im vorangegangen Abschnitt gezeigt, wird der Zusammenhang zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung quantifiziert, indem eine Übereinstimmung zwischen der Bewertung der Leistung und der Bewertung der Trainingsbelastung der Komponenten erzielt werden kann.
Der Anteil jeder Trainingskomponente an der Wettkampfleistung kann mit Hilfe der Modellgleichung der Trainingswirkungsanalyse quantifiziert werden.
Die hier vorgestellte Modellierung beschreibt ein allgemeingültiges Gruppenprofil, da die Bewertungen der Trainingskomponenten auf der Grundlage eines Rahmentrainingsplans erfolgen. Die Modellierung kann aber auch individuell für einen Sportler geschehen, indem die Bewertungen im Wesentlichen auf der statistischen Auswertung vorangegangener Jahre beruhen.
Unabhängig von der Festlegung der Bewertungen ergeben sich unmittelbar zwei Anwendungsmöglichkeiten des Modells in Form von Szenarienrechnungen.

Die Anwendung des Modells erbringt einen Beitrag zur Diskussion der Trainingswirkungsanalyse durch die Untersuchung, ob durch eine fiktive Umverteilung der realisierten Trainingsstunden eine bessere Wettkampfleistung möglich gewesen wäre. Dies erfolgt für jeden Sportler individuell. Obwohl für jeden Sportler das Basismodell einheitlich sein wird, unterscheiden sich die qualitativen Anteile der Trainingskomponenten jedes Sportlers aufgrund seiner individuellen Leistungsentwicklung.

Die nachfolgende Tabelle zeigt für das vorangegangene Beispiel auf der Grundlage des 17. Sportleralters den Auszug einer retrospektiven Stundenumverteilung.

Tab. 6-1: *Veränderung der Trainingsbewertung hinsichtlich der Eigenschaft "wirksam" bei Umverteilung des konstant gehaltenen GTU (Auszug)*

spez. Ausd.	*allg. E.*	*allg. Kraft*	*allg. Ausd.*	*spez. Kraft*	*Bewertung Trainingsbelastung*
+2	0	+2	-2	-2	57,0%
+2	-1	+1	-1	-1	58,5%
konkrete Realisierung eines Sportlers					60,0%
+1	+1	0	-2	0	68,3%
+1	+1	-2	-2	+2	79,5%

Auf der Grundlage der tatsächlich realisierten Trainingsstunden des Sportlers in den 5 Komponenten entspricht die Bewertung der Trainingsbelastung 60,0%. Bei einer Umverteilung der Stunden zu Gunsten des speziellen Ausdauer- (+1) und allgemeinen Ergänzungstrainings (+1) und Ungunsten des allgemeinen Ausdauertrainings (-2) liegt die Bewertung der Trainingsbelastung bei 68,3%. Diese Erhöhung der Bewertung der Trainingsbelastung um 8,3% entspricht einer Leistungserhöhung um 16,6 Distanz-FIS-Punkte.

Das Modell bietet des Weiteren eine Anwendungsmöglichkeit im prognostischen Sinne. Für einen Sportler, bei dem die realisierten Trainingsstunden in jeder Komponente unterhalb der Richtwerte des RTP liegen, wird untersucht, welche zusätzliche Stundenverteilung (Erhöhung des GTU) den größtmöglichen Zuwachs in der Leistungsbewertung erbringt.

Das heißt, das Modell bietet eine Entscheidungshilfe dafür, welche Trainingskomponente bzw. -komponenten der Sportler erhöhen und somit die Empfehlungen des Rahmentrainingsplans stärker realisieren müsste, um den größten Leistungszuwachs zu erzielen (ohne dabei den Richtwert laut RTP zu überschreiten).

Wie in der nachfolgenden Tabelle ersichtlich, führt eine Erhöhung aller Trainingskomponenten um eine Stunde zu einer Bewertungserhöhung in der Trainingsbelastung um 3,1%. Das entspricht einer Erhöhung der Leistung um 6,2 Distanz-FIS-Punkte.

Tab. 6-2: *Veränderung der Trainingsbewertung hinsichtlich der Eigenschaft "wirksam" bei Erhöhung GTU um 5 Stunden (Auszug)*

spez. Ausd.	*allg. E.*	*allg. Kraft*	*allg. Ausd.*	*spez. Kraft*	***Bewertung Trainingsbelastung***
0	0	+1	+4	0	45,1%
0	+2	+2	+1	0	57,5%
konkrete Realisierung eines Sportlers					60,0%
+1	+1	+1	+1	+1	63,1%
+1	0	+3	0	+1	67,3%

Aus der fiktiven Erhöhung des GTU um 5 Stunden lässt sich die optimale Stundenbelegung auf die 5 Trainingskomponenten bestimmen, die den größten Bewertungsanteil in der Trainingsbelastung aufweist. In Folge der Übereinstimmung zwischen der Bewertung der Wettkampfleistung und Trainingsbelastung entspricht die Erhöhung der Trainingsbewertung der Erhöhung der Leistungsbewertung des Sportlers.

Anhand der vorliegenden Tabelle ist zu erkennen, dass nicht jede Konstellation der Stundenbelegung eine Steigerung in der Trainingsbewertung zur Folge hat und somit nicht jede zusätzlich getätigte Trainingsstunde zu einem Leistungsanstieg führt.

Für diese Modellierung bedeutet eine Erhöhung des allgemeinen Ausdauertrainings eine Verschlechterung der Leistungsbewertung für den Sportler.

7 Zusammenfassung

Welches Training führt zu welcher Leistung? – In der vorliegenden Arbeit wurden erste Modellansätze aufgezeigt, die Antwort auf diese Fragestellung geben.

Es wurde gezeigt, dass ein vielversprechender Lösungsansatz zur Quantifizierung des Zusammenhanges zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung in der fuzzy-basierten Modellierung liegt. Die Verarbeitung unpräziser und unvollständiger Informationen auf der Basis von erfahrungsgestützten WENN-DANN-Regeln ermöglicht es, die Wettkampfleistung und die Trainingsbelastung, trotz deren Komplexität und Vielzahl an Einflussfaktoren, in einen mathematischen Zusammenhang zu bringen.

Das Modell erweist sich dabei als sensibel kontextbezogen. Das Ergebnis wird maßgeblich von Modellfestlegungen bestimmt, beispielsweise durch die Gestaltung der Bewertungsfunktionen. Dabei kann der Anwender die Modellbildung durch Einbringen von praktischen Erfahrungen und theoretischen Kenntnissen mitgestalten.

Die mathematische Optimierung zur Bestimmung der Koeffizienten verläuft jedoch automatisch.

Im Ergebnis ist es gelungen, den Anteil einer jeden Trainingskomponente am Wettkampferfolg zu quantifizieren. Somit bietet das Modell bereits erste Anwendungsmöglichkeiten in Form von Szenarienrechnungen für die Sportpraxis, indem die Auswirkungen von Veränderungen in der Trainingsgestaltung auf die Wettkampfleistung diskutiert werden können.

8 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein allgemeingültiges mathematisches Modell zur Quantifizierung des Zusammenhanges zwischen der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung am Beispiel des Hochleistungssport Skilanglauf vorgestellt und realisiert.
Das Verfahren ist mittels beeinflussbarer Freiheitsgrade auf die individuellen Trainings- und Wettkampfvoraussetzungen der Sportler anpassbar und wird im Wesentlichen durch 3 Verfahrensschritte beschrieben.

Der erste Schritt beinhaltet die Quantifizierung der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung mit Hilfe fuzzy-basierter Bewertungsfunktionen, die durch den Anwender auf Grund von sportwissenschaftlichen Erfahrungen und Empfehlungen mitgestaltet werden können.
Angesichts der verfügbaren Trainingsdaten wurde als Kenngröße für die Belastung der zeitliche Aufwand in Stunden gewählt. Die Trainingsbewertung ist jedoch unabhängig von den konkreten Inhalten der Trainingseinheiten und kann auf weitere Eingangsgrößen, die die Trainingsinhalte geeignet quantifizieren, übertragen werden.
Die gewählte mathematische Art der Bewertungsfunktionen ist verfahrensunabhängig und wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit am Beispiel der Dreiecksfunktion realisiert. Weiterführend könnte mittels Potenzialfunktion untersucht werden, ob durch deren weichere Charakterisierung eine Verbesserung in der Modellanpassung erzielt werden kann.

Der zweite Schritt umfasst die Modellierung des Zusammenhanges zwischen der Trainingsbelastung und der Wettkampfleistung auf der Basis erfahrungsgestützter WENN-DANN-Regeln. Die daraus resultierenden Modellgleichungen wurden mit Hilfe des Verfahrens von Karush-Kuhn-Tucker erfolgreich gelöst. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt automatisch und unabhängig von den Vorgaben des Anwenders.
Mittels geeigneter Modellfestlegungen kann eine Übereinstimmung zwischen der Bewertung der Wettkampfleistung und der Trainingsbelastung erzielt werden. Die Art der Modellfestlegungen ist auf subjektive und/oder erfahrungsgestützte Empfehlungen der Trainingswissenschaftler gestützt. Folglich wird das Ergebnis maßgeblich durch Modellvorstellungen des Anwenders beeinflusst und kann auf weitere geeignete Festlegungen der Sportpraxis untersucht werden, beispielsweise die Vorgabe des Funktionstyps der angepassten Bewertungsfunktion sowie die hierarchische Verteilung der Leistungszuwächse auf die Trainingskomponenten.

Der dritte Schritt bezieht sich auf die Interpretation der Modellergebnisse für den Anwender. Es wurden bereits 2 unmittelbare Anwendungsmöglichkeiten des Modells in Form von Szenarienrechnungen vorgestellt. Für die Sportpraxis von großer Bedeutung stellt dabei die

Auswertung im prognostischen Sinne dar. Inwieweit eine Prognosefähigkeit des Modells über geeignet gewählte Leistungsvorgaben erreicht werden kann, ist jedoch noch zu prüfen.
Die Schwierigkeit liegt dabei in der Einschätzung der Güte zwischen der durch das Modell vorhergesagten und tatsächlich realisierten Leistung des Sportlers. Ein wesentlicher Grund ist, dass der vorgeschlagene Trainingsaufbau im Allgemeinen nicht gänzlich im Sportleralltag zu realisieren ist, weswegen eine experimentelle Eignungsprüfung des Modells schwierig erscheint.

Da das Verfahren unabhängig von der Anzahl der Ebenen in der Trainingsstruktur ist, könnte die Unterteilung in weitere Ebenen in zukünftigen Untersuchungen berücksichtigt werden, um eine differenzierte Betrachtung der Trainingsinhalte zu ermöglichen.

Es ist zu erwarten, dass das am Beispiel des Hochleistungssports Skilanglauf vorgestellte Verfahren auf weitere Sportarten mit einem hohen Anteil im Ausdauerbereich übertragen werden kann, um den Trainingsaufbau zu optimieren.

Anhang

A-1 Berechnung der Koeffizienten der Modellgleichung mittels Fallunterscheidung

1. Fall: $\lambda_1{}^* = \lambda_2{}^* = 0$

Dann folgt aus [1] für $b_1{}^*$ und $b_2{}^*$:

$$b_2{}^* = \frac{\sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{spez}{}^{(j)} \cdot \sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)} - \sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)} \cdot (\sum_j B_{spez}{}^{(j)})^2}{(\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)})^2 - \sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2 \cdot \sum_j (B_{allg}{}^{(j)})^2}$$

$$b_1{}^* = \frac{\sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{spez}{}^{(j)} - b_2{}^* \cdot \sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)}}{\sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2}$$

Erfüllen $b_1{}^*$ und $b_2{}^*$ die KKT-Bedingung [2], so sind $b_1{}^*$ und $b_2{}^*$ Lösungen der Optimierungsaufgabe.

2. Fall: $\lambda_1{}^* = 0,\ \lambda_2{}^* \neq 0$

Durch die Festlegung von $\lambda_2{}^* \neq 0$ folgt aus der Gleichung $-\lambda_2{}^* \cdot b_2{}^* = 0$, dass $b_2{}^*$ den Wert 0 annehmen muss.

Infolgedessen lassen sich die beiden Gleichungen aus [1] schreiben als

$$-2 \cdot \sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - b_1{}^* \cdot B_{spez}{}^{(j)}\right) = 0$$
$$-2 \cdot \sum_j B_{allg}{}^{(j)} \cdot \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - b_1{}^* \cdot B_{spez}{}^{(j)}\right) - \lambda_2{}^* = 0$$

Aus diesem Gleichungssystem können $b_1{}^*$ und $\lambda_2{}^*$ berechnet werden

$$\lambda_2{}^* = \frac{2 \cdot (\sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{spez}{}^{(j)} \cdot \sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)} - \sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{spez}{}^{(j)} \cdot \sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2)}{\sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2}$$

$$b_1{}^* = \frac{\sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2{}^*}{\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)}}$$

Erfüllt $b_1{}^*$ die Ungleichungsnebenbedingung aus [2] und gilt für $\lambda_2{}^*$ die KKT-Bedingung aus [3], so sind

$$b_1{}^* = \frac{\sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_2{}^*}{\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)}}$$

und

$$b_2{}^* = 0$$

Lösungen der Optimierungsaufgabe.

3. Fall: $\lambda_1{}^* \neq 0,\ \lambda_2{}^* = 0$

In analoger Weise zu Fall 2 lassen sich $\lambda_1{}^*$ und $b_2{}^*$ berechnen.

Aus der ersten Gleichung aus [3] folgt durch $\lambda_1{}^* \neq 0$, dass $b_1{}^*$ gleich 0 sein muss.

Demnach gehen $\lambda_1{}^*$ und $b_2{}^*$ aus

$$-2 \cdot \sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - b_2{}^* \cdot B_{allg}{}^{(j)}\right) - \lambda_1{}^* = 0$$

$$-2 \cdot \sum_j B_{allg}{}^{(j)} \cdot \sum_j \left(B_{GTU}{}^{(j)} - b_2{}^* \cdot B_{allg}{}^{(j)}\right) = 0$$

hervor

$$\lambda_1{}^* = \frac{2 \cdot (-\sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{spez}{}^{(j)} \cdot (\sum_j B_{allg}{}^{(j)})^2 - \sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)} \cdot \sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)})}{\sum_j (B_{allg}{}^{(j)})^2}$$

$$b_2{}^* = \frac{\sum_j B_{GTU}{}^{(j)} \cdot B_{spez}{}^{(j)} + \frac{1}{2} \cdot \lambda_1{}^*}{\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)}}$$

Für $\lambda_1{}^* \geq 0$ und $b_2{}^* \geq 0$ sind die KKT-Bedingungen erfüllt, sodass die Lösung der Optimierungsaufgabe in $b_1{}^* = 0$ und dem errechneten $b_2{}^*$ liegt.

A-2 Beweis zu den Lösbarkeitsforderungen der Optimierungsaufgabe

Für die Lösbarkeit der Optimierungsaufgabe wird gefordert:

- $j \geq 2$

  Andernfalls würde sich bei der Berechnung von $b_2{}^*$ im Fall 1 (siehe A-1) der Nenner

  $$(\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)})^2 - \sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2 \cdot \sum_j (B_{allg}{}^{(j)})^2$$

  zu 0 ergeben, denn es gilt

  $$(\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot B_{allg}{}^{(j)})^2 = \sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2 \cdot \sum_j (B_{allg}{}^{(j)})^2$$

  für $j = 1$ gilt.
  Auf der Grundlage des Potenzgesetzes $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, $n \in \mathbb{N}^+, a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

  $$(B_{spez}{}^{(1)} \cdot B_{allg}{}^{(1)})^2 = (B_{spez}{}^{(1)})^2 \cdot (B_{allg}{}^{(1)})^2$$

- Für jedes Sportlerjahr muss gefordert werden, dass sich die Bewertung des speziellen Trainings nicht als Vielfaches der Bewertung des allgemeinen Trainings und umkehrt schreiben lässt.

  Angenommen die Bewertung des allgemeinen Trainings würde als Vielfaches der Bewertung des speziellen Trainings geschrieben werden, dann gilt

  $B_{allg}{}^{(j)} = k \cdot B_{spez}{}^{(j)}$ für alle berücksichtigten Trainingsjahre j, $k \in \mathbb{Z}$

  Dann ließe sich der Nenner von $b_2{}^*$ im Fall1 (siehe A-1) schreiben als

  $$(\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot k \cdot B_{spez}{}^{(j)})^2 - \sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2 \cdot \sum_j (k \cdot B_{spez}{}^{(j)})^2$$

  Demnach gilt

  $$(\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot k \cdot B_{spez}{}^{(j)})^2 = \sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2 \cdot \sum_j (k \cdot B_{spez}{}^{(j)})^2$$

Denn

$$(\sum_j B_{spez}{}^{(j)} \cdot k \cdot B_{spez}{}^{(j)}\,)^2 = k^2 \cdot (B_{spez}{}^{(j)\,2}\,)^2$$

$$\sum_j (B_{spez}{}^{(j)})^2 \cdot \sum_j (k \cdot B_{spez}{}^{(j)}\,)^2 = k^2 \cdot (B_{spez}{}^{(j)\,2}\,)^2$$

A-3 Berechnung der Koeffizienten und angepassten Bewertungen

Berechnung des angepassten Koeffizienten $a_4{}^*$ der Trainingskomponente TK_4

Betrachtet werden die drei Gleichungen

$$B(P^{17}) = \sum_{i=1}^{5} a_i\, B(h_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5)$$

$$B(P^{18}) = \sum_{i=1}^{5} a_i\, B(h_i + \Delta^{18} h_i) + Z^{18}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18} h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{18} h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5)$$

$$B(P^{19}) = \sum_{i=1}^{5} a_i\, B(h_i + \Delta^{19} h_i) + Z^{19}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{19} h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{19} h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{19} h_5)$$

im speziellen Fall

$\Delta^{18} h_1, \dots, \Delta^{18} h_3 = 0,\ \Delta^{18} h_4 > 0,\ \Delta^{18} h_5 > 0$ sowie $\Delta^{19} h_1, \dots, \Delta^{19} h_3 = 0,\ \Delta^{19} h_4 > 0,\ \Delta^{19} h_5 > 0$

Durch Subtraktion der 1. von der 2. und der 1. von der 3. Gleichung erhält man die beiden Gleichungen

$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B(h_4)] + a_5 \cdot [B(h_5 + \Delta^{18} h_5) - B(h_5)] + Z^{18}$$
$$=$$
$$a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B^*(h_4)] + a_5{}^* \cdot [B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5) - B^*(h_5)]$$

$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{19} h_4) - B(h_4)] + a_5 \cdot [B(h_5 + \Delta^{19} h_5) - B(h_5)] + Z^{19}$$
$$=$$
$$a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{19} h_4) - B^*(h_4)] + a_5{}^* \cdot [B^*(h_5 + \Delta^{19} h_5) - B^*(h_5)]$$

Dividiert man die erste Gleichung durch $\Delta^{18} h_5$, so erhält man

$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{18} h_5} - a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B^*(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{18} h_5} + \frac{Z^{18}}{\Delta^{18} h_5} =$$
$$a_5{}^* \cdot [\frac{B^*(h_5 + \Delta^{18} h_5) - B^*(h_5)}{\Delta^{18} h_5}] - a_5 \cdot [\frac{B(h_5 + \Delta^{18} h_5) - B(h_5)}{\Delta^{18} h_5}]$$

Für die zweite Gleichung ergibt sich bei Division durch $\Delta^{19}h_5$ nachfolgender Ausdruck

$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{19}h_4) - B(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{19}h_5} - a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) - B^*(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{19}h_5} + \frac{Z^{19}}{\Delta^{19}h_5} =$$
$$a_5{}^* \cdot [\frac{B^*(h_5 + \Delta^{19}h_5) - B^*(h_5)}{\Delta^{19}h_5}] - a_5 \cdot [\frac{B(h_5 + \Delta^{19}h_5) - B(h_5)}{\Delta^{19}h_5}]$$

Der Anstieg der Bewertungsfunktion B der Trainingskomponente TK_5

$$A_5 = \frac{B(h_5 + \Delta^{18}h_5) - B(h_5)}{\Delta^{18}h_5} = \frac{B(h_5 + \Delta^{19}h_5) - B(h_5)}{\Delta^{19}h_5}$$

soll in gleicher Weise dem Anstieg der angepassten Bewertungsfunktion B^* entsprechen, sodass gilt

$$A_5 = \frac{B^*(h_5 + \Delta^{18}h_5) - B^*(h_5)}{\Delta^{18}h_5} = \frac{B^*(h_5 + \Delta^{19}h_5) - B^*(h_5)}{\Delta^{19}h_5}$$

Infolgedessen kann geschrieben werden

$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{18}h_4) - B(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{18}h_5} - a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{18}h_4) - B^*(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{18}h_5} + \frac{Z^{18}}{\Delta^{18}h_5} =$$
$$a_5{}^* \cdot A_5 - a_5 \cdot A_5$$

und

$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{19}h_4) - B(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{19}h_5} - a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) - B^*(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{19}h_5} + \frac{Z^{19}}{\Delta^{19}h_5} =$$
$$a_5{}^* \cdot A_5 - a_5 \cdot A_5$$

Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt

$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{19}h_4) - B(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{19}h_5} - a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) - B^*(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{19}h_5} + \frac{Z^{19}}{\Delta^{19}h_5} =$$
$$a_4 \cdot [B(h_4 + \Delta^{18}h_4) - B(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{18}h_5} - a_4{}^* \cdot [B^*(h_4 + \Delta^{18}h_4) - B^*(h_4)] \cdot \frac{1}{\Delta^{18}h_5} + \frac{Z^{18}}{\Delta^{18}h_5}$$

$$a_4 \cdot [\frac{B(h_4 + \Delta^{19} h_4) - B(h_4)}{\Delta^{19} h_4}] \cdot \frac{1}{\Delta^{19} h_5 \cdot \Delta^{18} h_4} - a_4{}^* \cdot [\frac{B^*(h_4 + \Delta^{19} h_4) - B^*(h_4)}{\Delta^{19} h_4}] \cdot \frac{1}{\Delta^{19} h_5 \cdot \Delta^{18} h_4}$$

$$+ \frac{Z^{19}}{\Delta^{19} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4 \cdot \Delta^{18} h_4}$$

$$=$$

$$a_4 \cdot \left[\frac{B(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B(h_4)}{\Delta^{18} h_4}\right] \cdot \frac{1}{\Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4} - a_4{}^* \cdot [\frac{B^*(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B^*(h_4)}{\Delta^{18} h_4}] \cdot \frac{1}{\Delta^{18} h_5 \Delta^{19} h_4}$$

$$+ \frac{Z^{18}}{\Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4 \cdot \Delta^{18} h_4}$$

Unter der Annahme

$$A_4 = \frac{B(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B(h_4)}{\Delta^{18} h_4} = \frac{B(h_4 + \Delta^{19} h_4) - B(h_4)}{\Delta^{19} h_4}$$
$$= \frac{B^*(h_4 + \Delta^{18} h_4) - B^*(h_4)}{\Delta^{18} h_4} = \frac{B^*(h_4 + \Delta^{19} h_4) - B^*(h_4)}{\Delta^{19} h_4}$$

lässt sich schreiben

$$a_4 \cdot A_4 \cdot \frac{1}{\Delta^{19} h_5 \cdot \Delta^{18} h_4} - a_4{}^* \cdot A_4 \cdot \frac{1}{\Delta^{19} h_5 \cdot \Delta^{18} h_4} + \frac{Z^{19}}{\Delta^{19} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4 \cdot \Delta^{18} h_4}$$

$$=$$

$$a_4 \cdot A_4 \cdot \frac{1}{\Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4} - a_4{}^* \cdot A_4 \cdot \frac{1}{\Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4} + \frac{Z^{18}}{\Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4 \cdot \Delta^{18} h_4}$$

, sodass für $a_4{}^*$ folgt

$$a_4{}^* = a_4 + \frac{Z^{18} \cdot \Delta^{19} h_5 - Z^{19} \cdot \Delta^{18} h_5}{A_4 \cdot (\Delta^{18} h_4 \cdot \Delta^{19} h_5 - \Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4)}$$

$a_5{}^*$ wird in gleicher Weise berechnet.

$$a_5{}^* = a_5 + \frac{Z^{18} \cdot \Delta^{19} h_4 - Z^{19} \cdot \Delta^{18} h_4}{A_5 \cdot (\Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4 - \Delta^{18} h_4 \cdot \Delta^{19} h_5)}$$

mit $\Delta^{18} h_4 \cdot \Delta^{19} h_5 \neq \Delta^{18} h_5 \cdot \Delta^{19} h_4$ und $A_4, A_5 \neq 0$

Berechnung der angepassten Bewertungen der Trainingskomponente TK_4

Da der Anstieg der Bewertungsfunktionen B und B^* der Trainingskomponente TK_4 übereinstimmt und somit B^* nur aus der Verschiebung von B resultiert, gilt

$B^*(h_4) = B(h_4) + V_4$
$B^*(h_4 + \Delta^{18}h_4) = B(h_4 + \Delta^{18}h_4) + V_4$
$B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) = B(h_4 + \Delta^{19}h_4) + V_4$ mit V_4 ... Verschiebung der Trainingskomponente TK_4

Dies gilt in analoger Weise für die Bewertungsfunktionen der Trainingskomponente TK_5

$B^*(h_5) = B(h_5) + V_5$
$B^*(h_5 + \Delta^{18}h_5) = B(h_5 + \Delta^{18}h_5) + V_5$
$B^*(h_5 + \Delta^{19}h_5) = B(h_5 + \Delta^{19}h_5) + V_5$ mit V_5 ... Verschiebung der Trainingskomponente TK_5

Unter der Annahme, dass die Verschiebung einer Bewertungsfunktion V_4 oder V_5 bekannt ist, können die Bewertungen der jeweils anderen Trainingskomponente für die betrachteten Sportlerjahre errechnet werden.

Angenommen die Verschiebung $\boldsymbol{V_5}$ sei bekannt, dann lassen sich die Gleichungen

$B(P^{17}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5)$
$B(P^{18}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18}h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{18}h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{18}h_5)$
$B(P^{19}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{19}h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) + a_5{}^* \cdot B^*(h_5 + \Delta^{19}h_5)$

umformulieren zu

$B(P^{17}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4) + a_5{}^* \cdot [B(h_5) + V_5]$
$B(P^{18}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18}h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{18}h_4) + a_5{}^* \cdot [B(h_5 + \Delta^{18}h_5) + V_5]$
$B(P^{19}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i + \Delta^{19}h_i) + a_4{}^* \cdot B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) + a_5{}^* \cdot [B(h_5 + \Delta^{19}h_5) + V_5]$

Demnach können die Bewertungen der Trainingskomponente TK_4 angegeben werden.

$$B^*(h_4) = \frac{B(L^{17}) - \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot B(h_i) - a_5{}^* \cdot [B(h_5) + V_5]}{a_4{}^*}$$

$$B^*(h_4 + \Delta^{18}h_4) = \frac{B(L^{18}) - \sum_{i=1}^{3}\ a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18}h_i) - a_5{}^* \cdot [B(h_5 + \Delta^{18}h_i) + V_5]}{a_4{}^*}$$

$$B^*(h_4 + \Delta^{19}h_4) = \frac{B(L^{19}) - \sum_{i=1}^{3}\ a_i \cdot B(h_i + \Delta^{19}h_i) - a_5{}^* \cdot [B(h_5 + \Delta^{19}h_i) + V_5]}{a_4{}^*}$$

In Analogie gilt bei der Vorgabe der Verschiebung V_4 für die angepassten Bewertungen der Trainingskomponente TK_5

$$B^*(h_5) = \frac{B(L^{17}) - \sum_{i=1}^{3}\ a_i \cdot B(h_i) - a_4{}^* \cdot [B(h_4) + V_4]}{a_5{}^*}$$

$$B^*(h_5 + \Delta^{18}h_5) = \frac{B(L^{18}) - \sum_{i=1}^{3}\ a_i \cdot B(h_i + \Delta^{18}h_i) - a_4{}^* \cdot [B(h_4 + \Delta^{18}h_i) + V_4]}{a_5{}^*}$$

$$B^*(h_5 + \Delta^{19}h_5) = \frac{B(L^{19}) - \sum_{i=1}^{3}\ a_i \cdot B(h_i + \Delta^{19}h_i) - a_4{}^* \cdot [B(h_4 + \Delta^{19}h_i) + V_4]}{a_5{}^*}$$

Literaturverzeichnis

/1/ Perl, J., Mester, J. (2001): *Modellgestützte und statistische Analyse der Wechselwirkung zwischen Belastung und Leistung*, Leistungssport 31 (2), S. 54-63

/2/ Bitterlich, N., Kutzer J., Ostrowski C.(2009): *Zur Quantifizierung der Trainingswirkungsanalyse im Skilanglauf mittels fuzzy-basierter Modellierung*, Zeitschrift für die Angewandte Trainingswissenschaft (in Druck)

/3/ McNeill, D., Freiberger P. (1994): *Fuzzy Logic*, München: Droemer Knaur-Verlag

/4/ Kahlert, J. F. (1993): *Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg-Verlag

/5/ Bocklisch, S.F. (1987): *Prozeßanalyse mit unscharfen Verfahren*, Berlin: Akademie-Verlag

/6/ Ostrowski, C. (2007): *Ansätze zur Aufdeckung von Ursache-Wirkungsbeziehungen am Beispiel Skilanglauf*, Vortrag anlässlich des Workshops „Trainingsanalyse“ des FB Ausdauer am IAT Leipzig

/7/ Meyers Neues Lexikon in 8 Bänden: Band 3 (1962), Bibliographisches Institut Leipzig

/8/ Internetseite http://www.fis-ski.com/data/document/fis-points-rules-2009-2010.pdf
Internationaler Ski Verband – Langlauf Reglement FIS Punkte Ausgabe 2009
verfügbar am 01.07.09

/9/ Weineck, J.: *Optimales Training – Leistungsphysiologische Trainingslehre unter besonderer Berücksichtigung des Kinder- und Jugendtrainings* 14. Auflage, Erlangen: Spitta-Verlag, S. 41

/10/ Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik 7. Auflage*, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch

/11/ Ester, K.-H.(1978): Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte: *Nichtlineare Optimierung*, Band 15, Leipzig: Teubner-Verlag

/12/ Kutzer, J. (2008): *Ursache-Wirkungs-Analyse im Hochleistungssport bei Ausdauersportarten mittels Fuzzy-basierter Modelle zur Trainings- und Wettkampfbewertung*, Praktikumsbericht

Erklärung zur selbstständigen Anfertigung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Mittweida, den 28.10.09 Jenniffer Kutzer